



## O EXPERIMENTO DE UMA ESFERA NO PLANO INCLINADO: MODELOS TEÓRICOS E SUAS RESPECTIVAS ABRANGÊNCIAS

Mateus José da Silva, Augusto César de Lima Moreira, Sérgio de Lemos Campello

Núcleo Interdisciplinar de Ciências Exatas e da Natureza,

Centro Acadêmico do Agreste, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE),  
55.014-900, Caruaru – PE – Brasil

gmateusjose6@gmail.com, augusto.moreira@ufpe.br,  
sergio.campello@ufpe.br

**Resumo.** O modelo matemático para uma esfera que rola em um plano inclinado leva em consideração que o torque responsável pela rotação dessa esfera é proveniente da força de atrito estático entre a esfera e a superfície do plano. Entretanto, essa modelagem falha em explicar porquê corpos rolando param, pois, ao introduzir uma força de atrito para frear a esfera, também é introduzido um torque que aumentaria a velocidade angular dessa esfera. Assim, o objetivo desse trabalho é investigar experimentalmente os limites da modelagem de esferas se movimentando em planos inclinados. São investigadas as abrangências de cada modelo, assim como uma proposta de modelagem é inserida na tentativa de aprimorar a investigação experimental. Foi observado que cada modelo descreve melhor o fenômeno em regiões de validades diferentes com relação aos ângulos utilizados.

**Abstract.** The mathematical model for a sphere that rolls on an inclined plane takes into account that the torque responsible for the rotation of this sphere comes from the static friction force between the sphere and the surface of the plane. However, this modeling fails to explain why rolling bodies stop, because, when introducing a friction force to brake the sphere, a torque is also introduced that would increase the angular velocity of that sphere. Therefore, the objective of this work is to experimentally investigate the limits of modeling spheres moving on inclined planes. The scope of each model is investigated, as well as a modeling proposal is inserted in an attempt to improve the experimental investigation. It was observed that each model better describes the phenomenon in regions of different validity in relation to the angles used.

### 1. Introdução

O movimento de um corpo abandonado em um plano inclinado é um dos problemas clássicos abordados em livros de Física de qualquer nível. No ensino médio, de maneira mais específica, o deslizamento de corpos em planos inclinados é apresentado como um bloco abandonado na parte superior deste plano, escorregando com ou sem atrito até a sua base. No ensino superior, em cursos da grande área de exatas, é que modelos teóricos mais sofisticados envolvendo, por exemplo, rotações de objetos esféricos em planos inclinados são inseridos (TIPLER, 2006; ALONSO, 2014; NUSSENZVEIG, 2002; YOUNG, 2008). Assim, conceitos como o momento de inércia, momento angular e torque em corpos rígidos, propiciam a sofisticação dos modelos teóricos outrora estudados no ensino médio, explicando, por exemplo, as diferentes velocidades obtidas



por objetos cilíndricos e esféricos rolando sem escorregar em um mesmo plano inclinado (NUSSENZVEIG, 2002; JAN, 1997).

Alguns livros de Física Básica em nível universitário (TIPLER, 2006; ALONSO, 2014; NUSSENZVEIG, 2002; YOUNG, 2008) consideram como modelo para o problema de um objeto rolando em uma superfície, que o mesmo rola sem deslizar sob a influência de uma força de atrito estático o qual, por sua vez, é a única força geradora do torque nesse sistema. Contudo, mesmo este modelo teórico sendo mais sofisticado, ainda assim, não se leva em conta tanto a possibilidade de uma atuação concomitante entre a força de atrito cinético e a força de atrito estática, quando há rolamento com deslizamento (NUSSENZVEIG, 2002; LEMOS, 2007; THORNTON, 2008) quanto deformações na superfície por onde o objeto em questão passa. Pode-se mostrar (NUSSENZVEIG, 2002; THORNTON, 2008) que, se no primeiro caso (rolamento com deslizamento), acima de um ângulo de inclinação limite temos a transição entre os dois modelos (com e sem rotações), para o segundo caso (superfície que se deforma) a força normal pode exercer um torque que se opõe a rotação do objeto (SILVEIRA, 2011).

O objetivo deste trabalho consiste em estudar, experimentalmente, o movimento de esferas abandonadas em um plano inclinado comparando-o com os diferentes modelos teóricos apresentados na literatura (TIPLER, 2006; NUSSENZVEIG, 2002; YOUNG, 2008; SILVEIRA, 2011). Assim, leva-se em conta modelos teóricos cada vez mais complexos, onde considera-se: (i) apenas deslizamento, (ii) rolamento sem deslizamento com superfície rígida, (iii) rolamento com deslizamento com superfície rígida e, por fim, (iv) rolamento com deslizamento com superfície deformável, mostraremos em que situações experimentais, tais modelos podem ser considerados satisfatórios. Dito de outra forma, veremos quais modelos teóricos (indo dos mais básicos aos mais elaborados) tem o potencial de melhor representar o fenômeno real valendo-se do tempo de descida (td) em cada situação.

Diante do exposto, o trabalho está organizado da seguinte forma: na seção 2 desenvolveremos e discutiremos quatro diferentes modelos teóricos, com níveis crescentes de complexidade, envolvendo o problema de um objeto descendo um plano inclinado. Na seção 3 detalharemos o aparato experimental utilizado no trabalho. Na seção 4 mostraremos os resultados bem como a discussão dos mesmos e, por fim, na seção 5 faremos as conclusões.

## 2. Formulação do problema: pressupostos básicos

As principais formas de modelar o problema da esfera que rola em um plano inclinado, encontrados nos livros de Física Básica, são: desprezando atrito e rolamento; considerando o deslizamento com atrito e desprezando o rolamento; considerando que a força de atrito gera o torque necessário para o rolamento da esfera (fazendo com que a esfera possua movimento de rotação e translação combinados).

Para melhor compreender os modelos apresentados e como as diferentes considerações permitem chegar a resultados diferentes, será feito um esquema geral do problema. Assim, por hipótese, consideraremos que a aceleração translacional, seja qual for o modelo, será constante e, com isso, pode ser tratada com as equações do movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV). Logo, considerando a condição inicial do corpo como estando parado (velocidade inicial nula), a velocidade da esfera ao final de

um plano inclinado de comprimento  $L$  pode ser calculada por meio da equação de Torricelli (NUSSENZVEIG, 2002; YOUNG, 2008), a saber:

$$v^2 = 2aL \quad (1)$$

Por sua vez, o tempo total de descida ( $t_d$ ), dada pela equação horária do movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV), para percorrer uma distância  $L$  a partir do repouso, pode ser facilmente calculado, sendo dado por:

$$t_d = \sqrt{\frac{2L}{a}} \quad (2)$$

Considerando esta equação básica (eq. 2) e suas grandezas, estas serão trabalhadas a seguir com diferentes tipos de modelos teóricos, em crescente grau de complexidade, de forma a se obter valores para a aceleração ( $a$ ) considerando-se novos fatores no equacionamento do problema.

## 2.1. Modelo 1: deslizamento puro sem atrito em uma superfície rígida

Para equacionar o problema de um objeto em um plano inclinado, vamos considerar o diagrama de forças conforme apresentado na figura 1, com  $N$ ,  $Mg$  e  $F_a$  indicando os módulos das forças normal, peso e de atrito cinético, respectivamente.

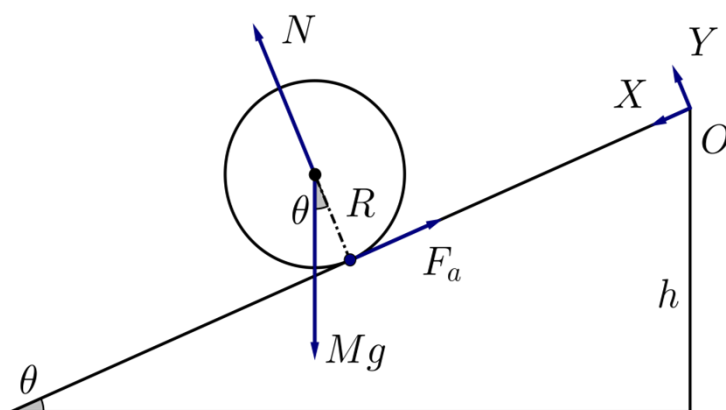


Figura 1 – Esquema básico do diagrama de forças utilizado nos modelos.

Utilizando a segunda lei de Newton para a esfera de massa  $M$ , obtemos as equações para a translação da esfera:

$$Ma = Mg \sin \theta - F_a \quad (3)$$

$$N - Mg \cos \theta = 0 \quad (4)$$

onde a aceleração da esfera é obtida como:

$$a = \frac{Mg \sin \theta - F_a}{M} \quad (5)$$



No caso do deslizamento sem atrito, temos que  $F_a = 0$  na eq. 3, de modo que o módulo da aceleração ( $a$ ) e o tempo de duração do movimento durante a descida ( $t_d$ ) são expressos, respectivamente, por:

$$a = g \sin \theta \quad (6)$$

$$t_d = \sqrt{\frac{2L}{g \sin \theta}} \quad (7)$$

## 2.2. Modelo 2: deslizamento puro (sem rolamento) com atrito cinético em uma superfície rígida

Para o modelo de deslizamento com atrito, o pressuposto básico é a existência de atrito entre a esfera e a superfície do plano inclinado com coeficiente de atrito cinético  $\mu$ . Neste modelo, a força de atrito e a aceleração do objeto, são calculadas e dadas (TIPLER, 2006; NUSSENZVEIG, 2002; YOUNG, 2008), respectivamente, por:

$$F_a = \mu N = \mu M g \cos \theta \quad (8)$$

$$a = g(\sin \theta - \mu \cos \theta) \quad (9)$$

Seguindo procedimento análogo ao da seção anterior, o tempo total de descida será dado por:

$$t_q = \sqrt{\frac{2L}{g(\sin \theta - \mu \cos \theta)}} \quad (10)$$

## 2.3. Modelo 3: rolamento sem deslizamento com a força de atrito estático como geradora de torque em uma superfície rígida

Neste modelo, a força de atrito é a geradora de torque na esfera, portanto, vemos que:  $\tau = F_a R = I_{cm} \alpha$ . Substituindo e reorganizando em termos da aceleração, obtém-se:

$$a = \frac{Mg \sin \theta}{M + \frac{I_{cm}}{R^2}} \quad (11)$$

Salientamos que neste caso, força de atrito estática é responsável por converter parte da energia potencial gravitacional em energia cinética de rotação, fazendo com que ao final do plano inclinado, a energia mecânica se conserve nesse sistema. Isso só é possível se considerarmos que a esfera rola sem deslizar durante toda a trajetória. Caso haja algum deslizamento (escorregamento), seria necessário analisar o atrito cinético com o objeto alternando entre rolar sem deslizar e rolar deslizando ao longo do movimento. Assim, considerando o momento de inércia de uma esfera em torno do seu diâmetro (TIPLER, 2006; NUSSENZVEIG, 2002; YOUNG, 2008; THORNTON, 2008), dado por  $I_{cm} = \frac{2}{5} MR^2$ , e resolvendo a equação para o tempo de queda, encontramos:

$$t_q = \sqrt{\frac{14L}{5g \sin \theta}} \quad (12)$$

## 2.4. Modelo 4: força de atrito estático como geradora de torque com superfície deformável

É importante destacar que o modelo de rolamento proposto inicialmente considera que a força de atrito estático é aplicada no ponto de contato entre a rampa e a esfera. Entretanto, devido às deformações que o objeto ou a superfície sofrem durante o movimento, ao invés de existir um ponto de contato, surgirá uma pequena região de contato, a qual impõe resistência ao rolamento. Torna importante nesse ponto frisar que, assim como no modelo clássico, o atrito estático continua a gerar o torque e a condição de não deslizamento continua sendo mantida. Porém, essas deformações, apesar de serem elásticas - pois fazem com que o objeto retorne a sua forma original depois do contato com a superfície, dissipam energia, uma vez que parte dessa energia é utilizada na deformação/restauração do corpo. Por consequência aumentando a energia interna aumenta, aquecendo o corpo que está a rolar. No trabalho de Silveira e colaboradores (SILVEIRA, 2011), pode ser adotado o seguinte diagrama para a esfera que rola em um plano horizontal (Figura 2).

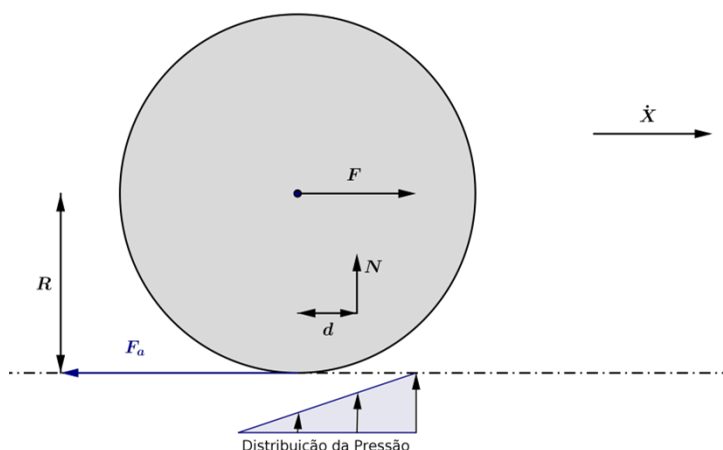


Figura 2 – Diagrama indicando o rolamento de esferas em um plano horizontal com destaque para a distribuição de pressão na parte posterior da esfera.

Devido ao rolamento, a pressão na região de contato entre a superfície e a esfera não será uniforme, levando assim a um deslocamento horizontal da força normal aplicada a esfera, uma vez que tal vetor passa a representar a força aplicada na região de deformação (YOUNG, 2008; SILVEIRA, 2011). Considerando também que a roda gire com velocidade constante, indicando que a força e o torque resultante na esfera são nulos, obtemos:

$$F_a R = N d \Rightarrow F_a = \frac{d}{R} N \quad (13)$$

A razão  $d/R$  foi denominada de coeficiente de resistência ao rolamento ( $\varepsilon$ ), tal que:

$$\varepsilon = \frac{d}{R} = \frac{F_a}{N} \quad (14)$$

Ao analisar a equação, caso  $d=0$ , desaparecerá a resistência ao rolamento. Assim, Silveira e colaboradores afirmam (SILVEIRA, 2011): “Em disciplinas de Física Geral, o rolamento de um corpo rígido sobre uma superfície rígida é usualmente o único modelo abordado teoricamente, implicando que na ausência de deformações valha trivialmente”.

Outra situação importante onde o modelo clássico se mostra insuficiente é a tentativa de explicar o que leva um objeto que está rolando parar, uma vez que ao introduzir uma força de atrito com o objetivo de frear o objeto, essa força de atrito faz com que o torque no sistema seja positivo, aumentando a velocidade angular. Supondo que tal cenário seja verídico, um objeto que inicialmente esteja em um movimento de rotação e translação combinados, estaria diminuindo a velocidade translacional e aumentando a velocidade rotacional, chegando a um ponto onde a esfera teria velocidade de translação nula, mas estaria girando com velocidade angular perpetuamente, o que claramente não descreve a situação real.

Aplicando as condições do modelo proposto por Silveira e colaboradores (SILVEIRA, 2011) ao problema da esfera que rola no plano inclinado, ainda é possível preservar as características básicas da modelagem utilizada ao longo da seção 2. Assim, as componentes da força resultante no sistema ainda são representadas pelas mesmas equações. Porém, neste caso, o torque resultante não é nulo, pois o sistema é acelerado. O somatório dos torques resulta, portanto, em:

$$\sum \tau = F_a R - Nd = I_{cm} \alpha \quad (15)$$

Logo, lembrando que  $\alpha = a/R$  (condição de não deslizamento) e  $\varepsilon = d/R$ , a força de atrito pode ser expressa por:

$$F_a = \frac{I_{cm} \alpha}{R} + \frac{Nd}{R} = I_{cm} \frac{a}{R^2} + N\varepsilon \quad (16)$$

Determinando, portanto, a aceleração da esfera, obtém-se:

$$a = \frac{Mg \sin \theta - N\varepsilon}{M + \frac{I_{cm}}{R^2}} \quad (17)$$

É importante notar que o fator  $N\varepsilon$  multiplicado pelo deslocamento total  $L$ , possui dimensão de trabalho. Logo, a energia não se conserva nesse modelo de modo que parte da energia do movimento é transformada devido às sucessivas deformações durante o rolamento. Por fim, utilizando novamente o momento de inércia da esfera, obtemos a duração do movimento, dada por:

$$t_q = \sqrt{\frac{14L}{5g(\sin \theta - \varepsilon \cos \theta)}} \quad (18)$$

No que segue, descreveremos o aparato experimental utilizado para se obter os tempos de descida, comparando os tempos medidos com os tempos obtidos pelos diferentes modelos teóricos.

### 3. Aparato experimental

Para definir quais parâmetros seriam considerados, foram realizadas uma série de análises a respeito das equações que descrevem o movimento da esfera na tentativa de capturar as melhores condições para realização do experimento. O propósito desse trabalho permitiu utilizar a relação entre deslocamento e duração do movimento, uma vez que o deslocamento pode ser mantido fixo e a duração do movimento pode ser facilmente obtida através de um cronômetro. A inclinação do plano e o comprimento do mesmo serão, portanto, variáveis a serem investigadas no problema. Assim, a análise será feita através da relação entre os modelos e curvas teóricas com a duração do movimento, observando



alterações de parâmetros como coeficientes de atrito, coeficientes de compressão, comprimento do plano inclinado e inclinação do plano.

O aparato experimental é composto por um plano inclinado de madeira, constituída por uma chapa de compensado de madeira com 1,50 m de comprimento e 0,20 m de largura, com guias de 2,00 cm para auxiliar as esferas a manterem suas trajetórias. Foram utilizadas cinco esferas maciças, de vidro e metal, de diferentes tamanhos (dispostas na tabela 1) e, para medição dos ângulos de inclinação, foi utilizado um smartphone com o aplicativo Phyphox instalado. O Phyphox é um aplicativo para Android e iOS desenvolvido pelo 2nd Institute of Physics of the RWTH Aachen University, da Alemanha, que permite usar os sensores presentes em um smartphone para propósitos experimentais. Com isso, os ângulos entre a rampa e o solo foram variados de 0° a 90°. O Phyphox também conta com uma função para determinação da aceleração gravitacional no local do experimento, a qual obteve  $g = 10,07 \text{ m/s}^2$ .

Para medir a duração do movimento nesse experimento, é utilizada uma placa Arduino MEGA 2560 e dois sensores infravermelhos também da Arduino (Figura 3). A placa será responsável por medir o intervalo de tempo entre a largada da esfera no topo do plano inclinado (sensor 1) e o momento que ela chega na base do plano (sensor 2). A placa Arduino consegue realizar medidas para o intervalo de tempo e o código executado na placa MEGA reúne informações de 50 lançamentos consecutivos, determinando e informando a média aritmética desses valores.

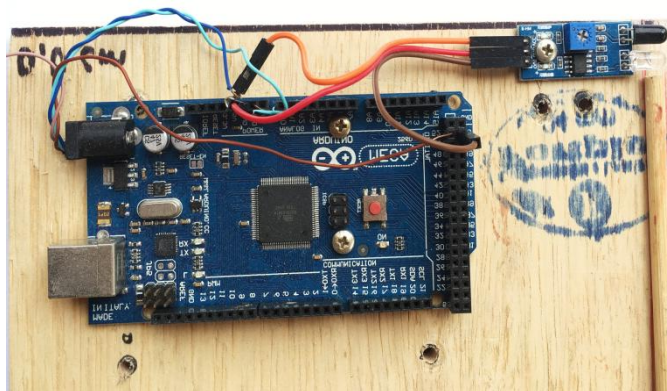


Figura 3 - Placa Arduino utilizada no experimento junto de um dos sensores IR na base do plano inclinado.

Para determinar o coeficiente de atrito das esferas, fez-se necessário colar três esferas, juntando-as lateralmente (indicado na figura 4), para evitar o rolamento e, assim, poder determinar a inclinação onde inicia a tendência de deslizamento. Admitindo a condição estática do modelo teórico, pode-se obter experimentalmente o coeficiente de atrito entre as superfícies através da relação com o ângulo crítico que promove a tendência de deslizamento, tal que  $\mu = \tan \theta$ . Foram registrados os ângulos críticos que promoveram a tendência de rolamento e deslizamento através de quatro medidas para cada esfera citada, o que totaliza 12 medidas diferentes para esferas de vidro e 8 medidas para esferas de metal. Nos modelos teóricos, foram utilizados os ângulos críticos médios para cada esfera. Para o coeficiente de resistência ao rolamento, de forma semelhante, é observado o ângulo crítico para que as esferas se desloquem rolando, desta vez, uma por uma.



Figura 4 - Três esferas de metal coladas com o objetivo de inibir o rolamento

#### 4. Resultados e discussões

Estão descritos na tabela 1 os diâmetros de cada esfera utilizada assim como os ângulos críticos médios obtidos e os respectivos coeficientes de atrito calculados.

Tabela 1 - Esferas utilizadas no experimento, respectivos diâmetros, ângulos críticos e coeficientes de atrito e de resistência ao rolamento.

Esfera	Diâmetro (cm)	Ângulo crítico (deslizamento)	Ângulo crítico (rolamento)	Coeficiente de atrito ( $\mu$ )	Coeficiente de resistência ao rolamento ( $\varepsilon$ )
Vidro I	0,94	12,0°	1,98°	0,21	0,03
Vidro II	1,90	12,0°			
Vidro III	2,50	12,0°			
Metal I	0,88	13,6°	2,12°	0,24	0,04
Metal II	1,20	13,6°			

Na tabela 2 podem ser encontrados os valores de tempo de queda médio das esferas no plano inclinado. Os valores representam uma média dos 50 lançamentos obtidos para cada ângulo  $\theta$ .

Tabela 2- Tempos de queda médios (em segundo) de cada esfera para ângulos entre 0° e 90°.

Ângulo (°)	t-Vidro I(s)	t-Vidro II(s)	t-Vidro III(s)	t-Metal I(s)	t-Metal II(s)
10,08	1,76	1,65	1,64	1,70	1,67
20,72	1,08	1,00	0,94	1,04	1,04
30,52	0,90	0,86	0,84	0,88	0,87
40,30	0,77	0,74	0,75	0,76	0,75
50,30	0,69	0,67	0,68	0,64	0,67
60,37	0,62	0,61	0,60	0,61	0,61
70,45	0,56	0,56	0,56	0,55	0,55



80,73	0,53	0,52	0,52	0,52	0,52
-------	------	------	------	------	------

Os gráficos para duração do movimento em função do ângulo de inclinação da pista, estão dispostos na figura 5 para as esferas de vidro (esquerda) e para as esferas de metal (direita). Estão dispostas também as curvas teóricas de cada modelo apresentado nas condições citadas. É possível observar o afastamento dos dados experimentais em relação ao modelo de compressão. É visível que, para altos ângulos, o modelo de compressão tende a se aproximar do modelo de rolamento, uma vez que a componente normal diminui à medida que a inclinação aumenta, diminuindo assim o fator de compressão na esfera. Um segundo aspecto a ser observado é o distanciamento dos dados experimentais em relação às curvas de rolamento e compressão, o que indica que o movimento nos ângulos intermediários são uma composição entre rolamento e deslizamento. Para ângulos realmente altos, por sua vez, passa a valer somente o deslizamento.

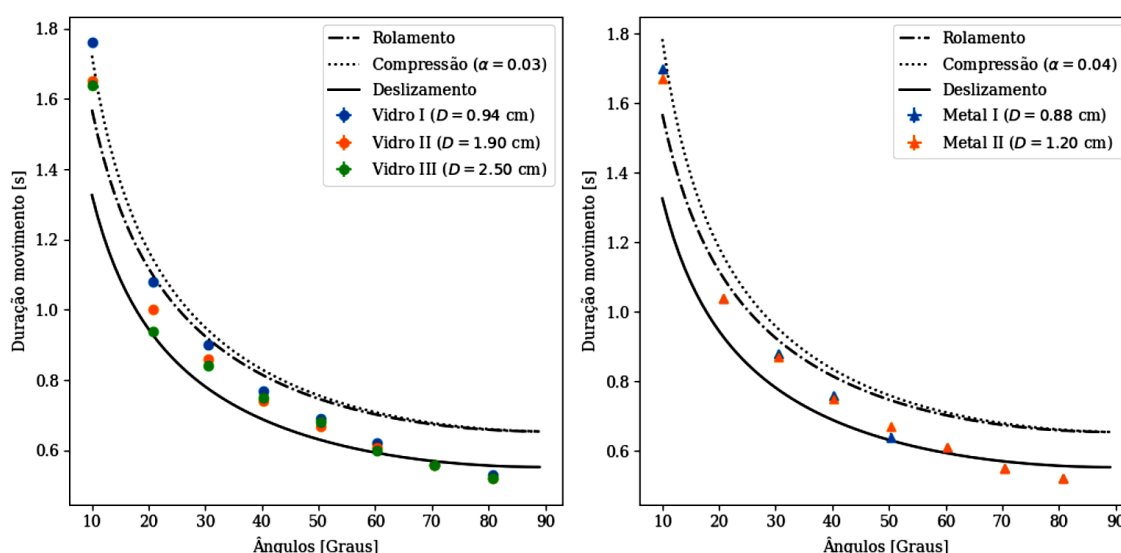


Figura 5 - Gráficos para a duração do movimento das esferas de vidro (esquerda) e metal (direita) em um plano inclinado de 1.5 m de comprimento. Em ambos estão representados os modelos teóricos para os parâmetros apresentados.

É importante mencionar que ângulos menores são mais relevantes para o modelo de resistência ao rolamento, uma vez que ângulos maiores implicam na sobreposição do modelo com resistência ao rolamento ao modelo de rolamento puro. A curva que representa a compressão (modelo com resistência ao rolamento devido a compressão da esfera durante o movimento) se assemelha à curva de rolamento para ângulos cada vez maiores – comportamento que também pode ser observado com a curva de fricção e a de deslizamento. Vale a pena também observar que nos ângulos menores a disparidade entre o modelo de fricção e os demais o torna um modelo menos assertivo para a presente situação, sendo assim excluído das próximas análises.

Em seguida, devido a uma transição clara observada nos gráficos apresentados na figura 5, o movimento foi investigado, de maneira mais precisa, para ângulos de inclinação no intervalo entre  $0^\circ$  e  $20^\circ$  com o intuito de obter uma melhor visualização das características do movimento para ângulos menores. Os resultados dos tempos de queda estão dispostos na tabela 3.

Tabela 3 - Duração do movimento das esferas para ângulos entre  $0^\circ$  e  $20^\circ$ .

Ângulo ( $^\circ$ )	$t_{\text{Vidro I}}(\text{s})$	$t_{\text{Vidro II}}(\text{s})$	$t_{\text{Vidro III}}(\text{s})$	$t_{\text{Metal I}}(\text{s})$	$t_{\text{Metal II}}(\text{s})$
4,37	2,36	2,28	2,22	2,33	2,27
8,62	1,83	1,77	1,67	1,75	1,72
12,26	1,49	1,48	1,45	1,42	1,42
16,45	1,26	1,22	1,22	1,22	1,22
20,72	1,08	1,00	0,94	1,04	1,04

Seguem os gráficos para os tempos de queda obtidos para as esferas no intervalo de  $0^\circ$  a  $20^\circ$  (Figura 6). Observando os resultados, percebe-se que a duração do movimento independe do raio das esferas, conforme todos os modelos teóricos previram, uma vez que para esferas de mesmo material com raios diferentes, a duração do movimento é aproximadamente a mesma.

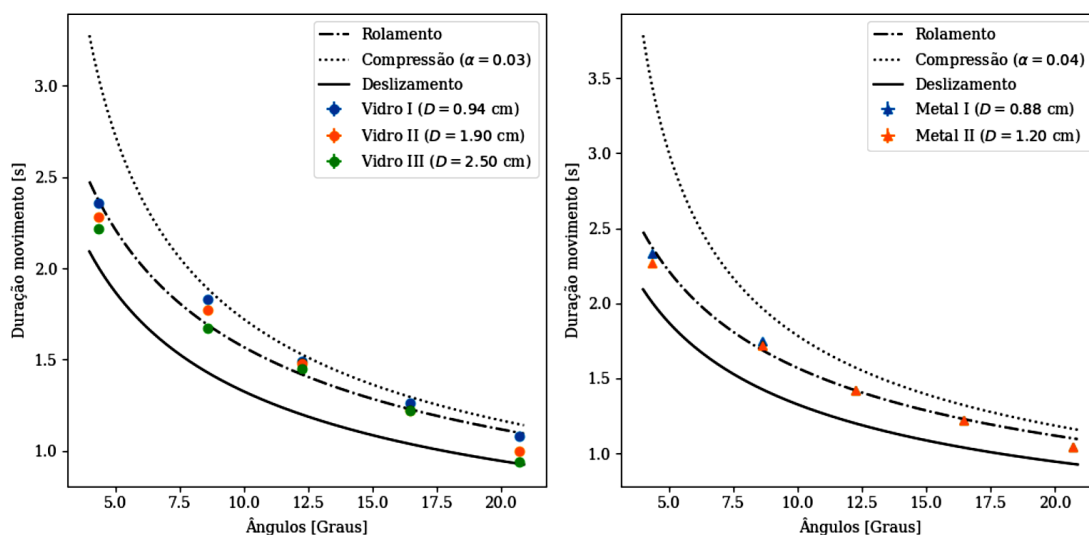


Figura 6 - Gráficos dos resultados para a duração do movimento das esferas de vidro (esquerda) e de metal (direita) em comparação com os modelos teóricos para ângulos entre  $0^\circ$  e  $20^\circ$ .

Tentando refinar ainda mais o experimento, foi investigado também com maior precisão o intervalo entre  $0^\circ$  e  $10^\circ$ . Desta vez, foram utilizadas apenas a esferas de maior

diâmetro (Vidro III e Metal II), cujo resultado está expresso na tabela 4 e nos gráficos da figura 7. Para ângulos entre  $0^\circ$  e  $10^\circ$  as esferas de vidro e metal possuem comportamentos idênticos entre si e, conseqüentemente, concordantes com o modelo de rolamento utilizado corriqueiramente em cursos de Física

Tabela 4 - Duração do movimento para ângulos entre  $0^\circ$  e  $10^\circ$  com as esferas Vidro III e Metal II.

Ângulo ( $^\circ$ )	t-Vidro III(s)	t-Metal II(s)
3,71	2,74	2,82
4,73	2,45	2,46
5,67	2,12	2,12
6,70	1,97	1,95
7,72	1,77	1,72
8,60	1,67	1,64
9,24	1,64	1,60
10,34	1,52	1,49

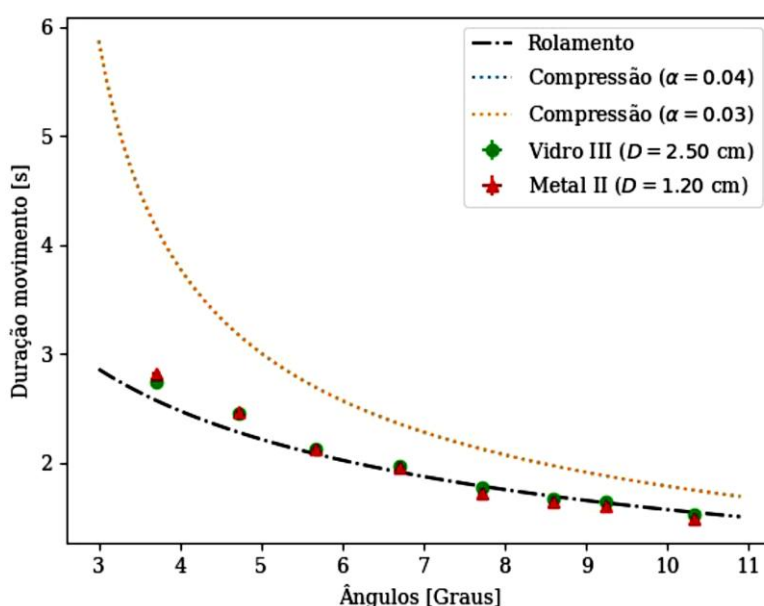


Figura 7 - Gráfico dos resultados experimentais da duração do movimento para esferas de vidro (verde) e esferas de metal (vermelha) em comparação com os modelos teóricos para ângulos entre  $0^\circ$  e  $10^\circ$  graus

Durante a análise dos modelos e dos dados experimentais, foi possível perceber que a resistência ao rolamento e ao atrito diminuem à medida que a inclinação do plano inclinado aumenta, ou seja: quando  $\theta \rightarrow 90^\circ$ , os coeficientes  $\mu, \varepsilon \rightarrow 0$ . De uma maneira



geral, pode-se dizer que, para a esfera que rola o plano inclinado, não há uma modelagem definitiva, de acordo com nossos dados. O que foi possível concluir é que existem intervalos onde uma modelagem será mais assertiva que outra. Por exemplo, para ângulos entre  $0^\circ$  e  $20^\circ$ , o modelo de rolamento descreve bem os resultados experimentais. No entanto, para intervalos com ângulos maiores de  $60^\circ$ , o modelo de deslizamento se torna mais adequado. Em intervalos intermediários ( $20^\circ < \theta < 60^\circ$ ) o experimento mostra que características de deslizamento e rolamento coexistem. Concluímos que a esfera pode estar rolando e deslizando simultaneamente, ou até mesmo ora rolando e ora deslizando.

Dentro das características desse experimento, o modelo de compressão não se provou adequado, o que se deve ao fato de que os materiais utilizados (vidro e metal) possuem uma compressibilidade extremamente baixa, o que claramente não favorece o modelo. Entretanto, tal modelo se mostra mais promissor quando o objeto de estudo for um material emborrachado (exemplo: roda de bicicleta), uma vez que sua compressibilidade é razoavelmente maior. Tal fato fica evidente quando se observa a incerteza na medida do coeficiente de compressão obtida, a qual é maior do que a diferença entre os coeficientes. Isso indica que, em termos experimentais, não há uma diferença significativa entre o metal e o vidro. Sob a ótica do experimento, metal e vidro são praticamente semelhantes.

## 5. Conclusões

No decorrer desse texto, foram indicados os modelos mais comuns para se abordar o problema de uma esfera rolando em um plano inclinado: deslizamento sem atrito, deslizamento (sem rolamento) com atrito, rolamento sem deslizamento com superfície rígida e rolamento sem deslizamento com superfície deformável, sendo que os três primeiros modelos, são os mais utilizados e discutidos em livros de física básica (TIPLER, 2006; ALONSO, 2014; NUSSENZVEIG, 2002; YOUNG, 2008). Todavia, esses três modelos não contemplam situações em que uma esfera que esteja rolando perca energia ou haja uma significativa compressão dessa esfera durante o movimento. Assim, com o intuito de averiguar as condições nas quais se deve abranger situações onde a deformação da superfície não pode ser descartada, foi introduzido um modelo que leva em conta a compressão da esfera ou da superfície na qual ela esteja impondo assim uma resistência ao rolamento conforme a referência (SILVEIRA, 2011).

No presente trabalho, apresentamos os resultados experimentais e as conclusões obtidas através de uma abordagem investigativa de um problema clássico da Física. Consideramos para isso materiais de custos acessíveis para os cursos em universidades públicas e até mesmo para serem obtidos de forma individual por um estudante. Tal experimento também pode ser utilizado em aulas experimentais de laboratório aberto (LABURU, 2001; LABURU, 2003), utilizando diferentes materiais, os quais podem trazer diferentes resultados para análise. Por exemplo, dimensões e materiais diversos das esferas e rampa podem levar os resultados a diferentes conclusões, enriquecendo assim o debate sobre modelagem científica (BRANDÃO, 2011; SANTOS, 2007; RICARDO, 2003).

Finalmente, vale a pena comentar a importância desse trabalho em propor novas abordagens e interpretações para um problema que várias referências bibliográficas



consideram ‘fechado’. Note, por exemplo que, de grosso modo, temos uma transição entre rolar sem deslizar e deslizamento puro na medida em que o ângulo de inclinação aumenta. Contudo, o fator de deformação da superfície torna-se particularmente relevante para o vidro em um intervalo de ângulo que vai de  $7,5^\circ$  até  $12,5^\circ$ . Tal fato não é levado em consideração em livros didáticos e, neste sentido, o presente trabalho pode desenvolver o senso crítico em relação aos modelos, exemplos e problemas abordando este tema, discutidos nos manuais didáticos em cursos universitários.

## 6. Referências

- ALONSO, M.; FINN, E. *Física: Um curso universitário*. Vol. 1. São Paulo: Blucher, 2014.
- ARRUDA, S. M.; SOUZA, M. R.; LABURÚ, C. E. Laboratório didático de física a partir de uma perspectiva Kuhniana. *Investigação em Ensino de Ciências*, v. 6, n. 1, p. 10, 2001.
- BRANDÃO, R. V.; ALMEIDA, I. S.; VEIT, E. A. A modelagem científica vista como um campo conceitual. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 28, n. 3, p. 39, 2011.
- JAN, C. D.; CHEN, J. C. Movements of a sphere rolling down an inclined plane. *Journal of Hydraulic Research*, v. 35, n. 5, p. 19, 1997.
- LABURÚ, C. E. Problemas abertos e seus problemas no laboratório de física: uma alternativa dialética que passa pelo discurso multivocal e univocal. *Investigações em Ensino de Ciências*, v. 8, n. 3, p. 26, 2003.
- LEMO, N. A. *Mecânica Analítica*. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.
- NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: Mecânica*. Vol. 1. São Paulo: Edgard Blucher, 2002.
- RICARDO, E. C. A Problemática e a Contextualização no Ensino das Ciências: acerca das ideias de Paulo Freire e Gérard Fourez. In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, IV, 2003, Bauru - SP, 2003.
- SANTOS, W. L. P. Contextualização no Ensino de Ciências Por Meio de Temas CTS em uma Perspectiva Crítica. *Ciência & Ensino*, v. 1, p. 12, 2007.
- SILVEIRA, F. Potência de tração de um veículo automotor que se movimenta com velocidade constante. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 33, n. 1, 2011.
- STEPHEN, T. T.; MARION, J. B. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. 5. ed. New York: Thomson, 2008.



TIPLER, P. A.; MOSCA, G. *Física para Cientistas e Engenheiros*. Vol. 1. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2006.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. *Sears & Zemansky, Física I: Mecânica*. São Paulo: Editora Pearson, 2008.