

Uma Construção Alternativa da Trigonometria Hiperbólica

Admilson Alves dos Santos ¹, Joselito de Oliveira ²

¹Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima-IFRR
Boa Vista -RR -Brasil

²Departamento de Matemática – Universidade Federal de Roraima-UFRR
Boa Vista -RR -Brasil

alvessantos.alvesdossantos@gmail.com, joselito.oliveira@ufrr.br

Resumo. Neste artigo, apresenta-se um estudo da construção da trigonometria hiperbólica e de suas funções a partir do gráfico de uma hipérbole. O ponto de partida é o conceito de setor da hipérbole equilátera, comparando-o com o setor circular. Utiliza-se elementos da Geometria Euclidiana Plana, Geometria Analítica e Logaritmo, evitando o uso do cálculo diferencial e integral, como em outras abordagens. O artigo é voltado para estudantes e professores do ensino médio envolvidos em projetos de iniciação científica e em disciplinas específicas de matemática e suas tecnologias.

Abstract. This paper presents a study of the construction of hyperbolic trigonometry and its functions, starting from the graph of a hyperbola. The starting point is the concept of the sector of the equilateral hyperbola, comparing it to the circular sector. Elements of Plane Euclidean Geometry, Analytic Geometry, and Logarithms are used, avoiding the use of differential and integral calculus, as in other approaches. The paper is aimed at high school students and teachers involved in scientific initiation projects and in specific disciplines of mathematics and its technologies.

1. Introdução

Em livros de Cálculo Diferencial e Integral, como por exemplo Stewart(2009, v.1), podemos nos deparar com uma abordagem da trigonometria hiperbólica de tal forma que primeiramente são apresentadas as duas razões trigonométricas básicas, seno e cosseno hiperbólicos de $x \in \mathbb{R}$ definidas por

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

respectivamente, onde $e \approx 2,71$ é uma constante denominada de número de Euler. Posteriormente, utilizando-as para definir a tangente, a cotangente, a secante e a cossecante hiperbólicas da seguinte forma:

$$\begin{array}{lll} \operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} & \text{ou} & \operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \\ \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} & \text{ou} & \operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}; \\ \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} & \text{ou} & \operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}; \\ \operatorname{cossech} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} & \text{ou} & \operatorname{cossech} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}. \end{array}$$

E ainda nesse contexto é mostrado que um ramo de uma hipérbole pode ser parametrizado pelo seno e o cosseno hiperbólicos. Em suma, primeiramente define-se o seno hiperbólico e o cosseno hiperbólico a partir de suas fórmulas matemáticas para então analisar a correspondência com a hipérbole. Além disso, McMahon (1906) apresenta uma construção da trigonometria hiperbólica relacionando a área de um setor da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ com a área de um setor da hipérbole equilátera $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Autores como Carvalho (2005), Vasconcelos (2013) e Mingoranci (2016) apresentam um estudo das funções trigonométricas hiperbólicas definindo a abscissa e ordenada de um ponto sobre a hiperbóle equilátera $x^2 - y^2 = 1$ como cosseno hiperbólico e seno hiperbólico, respectivamente, cujo argumento está relacionado ao valor numérico da área de um setor hiperbólico. Para explicitar as fórmulas das razões trigonométricas hiperbólicas em função do argumento, utilizam-se da relação entre as curvas $y = \frac{1}{2x}$ e $x^2 - y^2 = 1$ e aplicando resultados do cálculo diferencial e integral.

O objetivo deste artigo é apresentar um estudo sobre a construção da trigonometria hiperbólica a partir do gráfico de uma hipérbole e também utilizando o conceito de área e de logaritmo, e só então apresentar as fórmulas matemáticas que as definem, evitando o uso do cálculo diferencial e integral, como em outras abordagens. Destacamos que este artigo é parte de uma dissertação produzida no Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT (SANTOS, 2014), realizada na Universidade Federal de Roraima-UFRR, escrita pelo primeiro Autor sob orientação do segundo Autor.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: Na Seção 2 são apresentadas as razões trigonométricas hiperbólicas, definidas a partir de um setor hiperbólico e fazendo analogia com o setor circular. Na Seção 3, é apresentado uma interpretação geométrica de cada razão trigonométrica hiperbólica. Já na Seção 4, o objetivo é apresentar um estudo sobre a conexão entre as trigonometrias: hiperbólica e circular. Na Seção 5, são apresentadas as fórmulas das razões trigonométricas hiperbólicas do argumento α . Por fim, na Seção 6, são apresentadas as funções trigonométricas hiperbólicas e os respectivos gráficos, onde foi usado o software GeoGebra para obtenção dos mesmos.

2. A Função α

Este trabalho foi desenvolvido tomando-se como ideia principal a construção das funções trigonométricas hiperbólicas a partir da interpretação gráfica de um setor hiperbólico e fazendo uma analogia com o setor circular.

Dada uma circunferência de raio medindo r , por definição, um arco de comprimento l dessa circunferência possui medida α radianos com $\alpha \in \mathbb{R}$, se $\alpha = \frac{l}{r}$. Daí, numa circunferência unitária (de raio 1) temos $\alpha = l$. Por outro lado, sabe-se também que o comprimento dessa circunferência é 2π . Além disso, a área de um setor circular é diretamente proporcional ao comprimento do arco referente a esse setor, consequentemente, diretamente proporcional à medida deste arco. Com isso, localizando a circunferência unitária num sistema cartesiano OXY com centro em

$O(0,0)$, fixando o ponto $A(1,0)$, tomado B , um ponto sobre a circunferência e denotando a área do setor circular AOB por $A_{(AOB)}$, sendo α radianos a medida do ângulo $A\hat{O}B$, temos:

$$\begin{array}{ccc} A_{(AOB)} & \longleftrightarrow & \alpha \text{rad} \\ \pi & \longleftrightarrow & 2\pi \text{rad} \end{array} \quad (1)$$

Logo, de (1), $\alpha = 2 \cdot A_{(AOB)}$.

Motivados pela igualdade anterior, daremos a seguinte definição para o argumento hiperbólico:

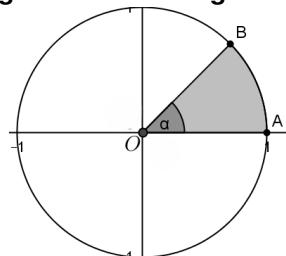
Definição 2.1. Sejam $O(0,0)$, $A(1,0)$ e $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - y^2 = 1, x \geq 1\}$, definimos o argumento hiperbólico (ou ângulo hiperbólico) pela função $\alpha : H \mapsto \mathbb{R}$ tal que para todo ponto $B(x,y) \in H$, temos:

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 2A_{[OA(x,y)]} & \text{se } y \geq 0 \\ -2A_{[OA(x,y)]} & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

onde $A_{[OA(x,y)]}$ é a medida da área do setor OAB limitado por OA , OB e H .

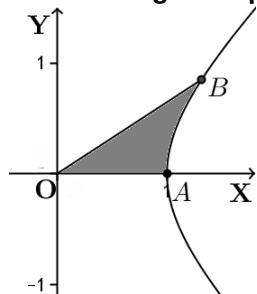
Veja os gráficos a seguir, onde a Figura 1 mostra o setor angular circular, e a Figura 2, um setor angular hiperbólico.

Figura 1. Setor angular circular



Fonte: Santos (2014)

Figura 2. Setor angular hiperbólico



Fonte: Santos (2014)

Uma definição análoga à apresentada anteriormente pode ser encontrada em Carvalho (2005).

Note que quando $B = A$, $\alpha = 0$ e que cada setor hiperbólico OAB possui uma única medida de área. Dessa forma, a medida do “ângulo hiperbólico” está

bem definida.

Dado que o ramo hiperbólico considerado na definição 2.1 é uma curva simétrica com relação ao eixo OX , a função α possui a seguinte propriedade: para todo $y \in \mathbb{R}$ tal que o ponto $B(x, y) \in D(\alpha)$ (domínio da função α), $\alpha(x, y) = -\alpha(x, -y)$. A seguir, apresentaremos uma definição para: o cosseno hiperbólico (\cosh), o seno hiperbólico (\sinh), a tangente hiperbólica (\tgh), a secante hiperbólica (\sech) e a cossecante hiperbólica (\cossech).

Definição 2.2. Considere α e $B(x, y)$ apresentados na Definição 2.1, define-se o seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante, hiperbólicas, respectivamente por:

1. $\cosh \alpha = x;$
2. $\sinh \alpha = y;$
3. $\tgh \alpha = \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha};$
4. $\cotgh \alpha = \frac{\cosh \alpha}{\sinh \alpha}, \text{ se } \alpha \neq 0;$
5. $\sech \alpha = \frac{1}{\cosh \alpha};$
6. $\cossech \alpha = \frac{1}{\sinh \alpha}, \text{ se } \alpha \neq 0.$

Teorema 2.1 (Identidade Fundamental da Trigonometria Hiperbólica). Seja α um número real, então

$$\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1.$$

Demonstração. Dado que o ponto $B(x, y)$ pertence à hipébole $x^2 - y^2 = 1$, temos, imediatamente da Definição 2.1, que: $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$. \square

Propriedade 2.1. Seja α um número real. segue que:

1. $\cosh \alpha = 1$ e $\sinh \alpha = 0$ se, e somente se, $\alpha = 0$;
2. se $\alpha > 0$, então $\sinh \alpha > 0$, e se $\alpha < 0$, então $\sinh \alpha < 0$;
3. $\cosh \alpha \geq 1$;
4. $\cosh \alpha = \cosh(-\alpha)$ e $\sinh \alpha = -\sinh(-\alpha)$;
5. $\cosh \alpha > |\sinh \alpha|$;
6. $|\tgh \alpha| < 1$;
7. $\sech^2 \alpha = 1 - \tgh^2 \alpha$;
8. $\cossech^2 \alpha = \cotgh^2 \alpha - 1$.

Demonstração:

Tomemos $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $\alpha = \alpha(x, y)$, onde $B(x, y)$ é um ponto do ramo direito da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.

1. Dado que por definição, $\alpha(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = 1$ e $y = 0$, segue da definição de seno e cosseno hiperbólicos, que $\cosh \alpha = 1$ e $\sinh \alpha = 0$ se, e somente se, $\alpha = 0$.
2. i) Se $\alpha > 0$, da Definição 2.2 tem-se que $y > 0$. Assim, da definição de seno hiperbólico, segue que $\sinh \alpha > 0$.

- ii) Se $\alpha < 0$, da Definição 2.2 tem-se que $y < 0$. E portanto $\operatorname{senh} \alpha < 0$.
3. Pela Definição 2.1 temos que $x \geq 1$. Segue deste fato que $\cosh \alpha \geq 1$.
 4. Visto que, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha(x, y) = -\alpha(x, -y)$, temos da Definição 2.2 que:
 - i) $\cosh \alpha = x = \cosh(-\alpha)$;
 - ii) $\operatorname{senh}(-\alpha) = -\operatorname{senh} \alpha$, pois sendo $\operatorname{senh} \alpha = y$ então $\operatorname{senh}(-\alpha) = -y$. 5. Aplicando a identidade fundamental da trigonometria hiperbólica, temos $|\cosh \alpha| > |\operatorname{senh} \alpha|$. Visto que $\cosh \alpha > 0$, segue o resultado.
 6. Pela Propriedade (6.) segue que

$$\cosh \alpha \cdot (\cosh \alpha)^{-1} > |\operatorname{senh} \alpha| \cdot (\cosh \alpha)^{-1},$$

o que nos dá $|\operatorname{tgh} \alpha| < 1$.

7. Pela identidade fundamental da trigonometria hiperbólica, tem-se

$$(\cosh^2 \alpha - \operatorname{senh}^2 \alpha) \cdot (\cosh^2 \alpha)^{-1} = 1 \cdot (\cosh^2 \alpha)^{-1}.$$

Portanto, $\operatorname{sech}^2 \alpha = 1 - \operatorname{tgh}^2 \alpha$.

8. Considere $\alpha \neq 0$. Pela identidade fundamental da trigonometria hiperbólica, temos

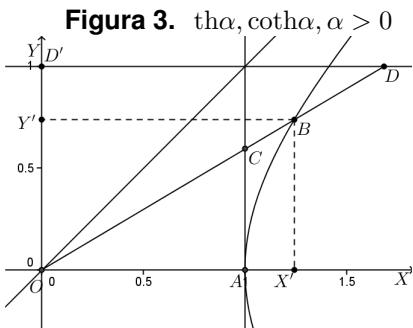
$$(\cosh^2 \alpha - \operatorname{senh}^2 \alpha) \cdot (\operatorname{senh}^2 \alpha)^{-1} = 1 \cdot (\operatorname{senh}^2 \alpha)^{-1},$$

o que nos dá: $\operatorname{cossech}^2 \alpha = \operatorname{cotgh}^2 \alpha - 1$. □

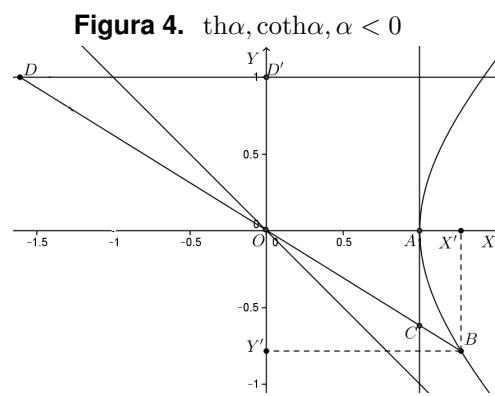
3. Interpretação Geométrica das Razões Trigonométrica Hiperbólicas

Tendo definido as razões trigonométricas hiperbólicas, nesta seção uma interpretação geométrica é apresentada.

Considere o ponto B onde sua abscissa é $\cosh \alpha$ e sua ordenada é $\operatorname{senh} \alpha$. Para localizar geometricamente $\operatorname{tgh} \alpha$ e $\operatorname{cotgh} \alpha$, considere $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = \alpha(B)$. Sejam as retas $r_1 : x = 1$ e $r_2 : y = 1$; os pontos A, C, D e D' são tais que $A(1, 0)$, $r_1 \cap \overleftrightarrow{OB} = \{C\}$, $r_2 \cap \overleftrightarrow{OB} = \{D\}$ e $D'(0, 1)$. Além disso, toma-se X' e Y' tais que $X'(1, \operatorname{tgh} \alpha)$ e $Y'(0, \operatorname{senh} \alpha)$. Os pontos C e D são tais que $C(1, \operatorname{tgh} \alpha)$ e $D(\operatorname{cotgh} \alpha, 1)$. A Figura 3 ilustra o caso $\alpha > 0$ e a Figura 4, o caso $\alpha < 0$.



Fonte: Santos (2014).



Fonte: Santos (2024).

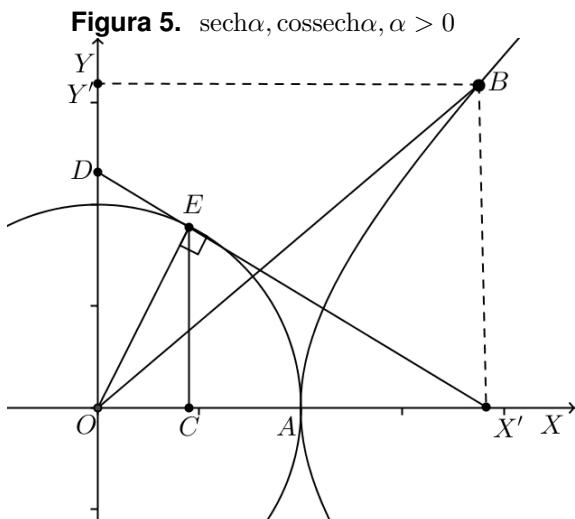
De fato, temos $\overline{OA} = 1$, $\overline{BX'} = |\operatorname{senh} \alpha|$ e $\overline{OX'} = \cosh \alpha$. Por outro lado, $O\widehat{AC}\equiv O\widehat{X'B} = 90^\circ$ e $A\widehat{OC}\equiv X'\widehat{OB}$ (possuem lados comuns). Daí, $\triangle X'OB \sim \triangle AOC$. Logo,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BX'}} = \frac{1}{\overline{OX'}}, \text{ isto é, } \overline{AC} = \frac{|\operatorname{senh} \alpha|}{\cosh \alpha}. \quad (2)$$

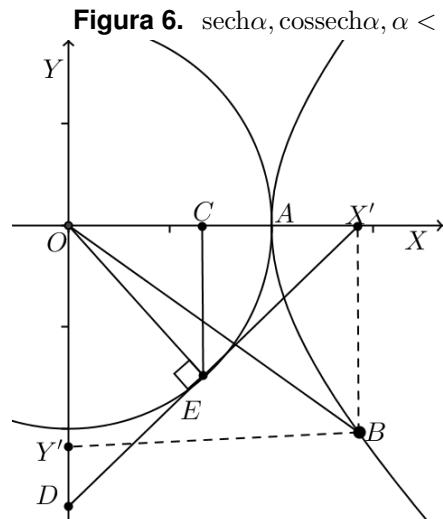
Tem-se também $X'\widehat{OB} \equiv O\widehat{DD'}$ (ângulos alternos internos) e $O\widehat{X'B} \equiv O\widehat{D'D}$ (ângulos retos). Ou seja, $\triangle X'OB \sim \triangle DD'O$. Com isso,

$$\frac{\overline{D'D}}{\overline{OX'}} = \frac{1}{\overline{BX'}}, \text{ isto é, } \overline{D'D} = \frac{\cosh \alpha}{|\operatorname{senh} \alpha|}. \quad (3)$$

De (2) e de (3), conclui-se que $\operatorname{tgh} \alpha = \overline{AC}$ e $\operatorname{cotgh} \alpha = \overline{D'D}$, se $\alpha > 0$; $\operatorname{tgh} \alpha = -\overline{AC}$ e $\operatorname{cotgh} \alpha = -\overline{D'D}$, se $\alpha < 0$. Para localizar geometricamente as razões trigonométricas hiperbólicas cossech e sech, toma-se, arbitrariamente, $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = \alpha(B)$. Considere a circunferência unitária S^1 com centro em $O(0,0)$; os pontos $X'(\cosh \alpha, 0)$ e $Y'(\operatorname{senh} \alpha, 0)$; $D \in OY$ tal que $X'D$ tangencia S^1 em E ; e $C \in OX$ de modo que EC seja a altura do $\triangle OEX'$ com relação OX' . Nestas condições, $\overline{OC} = \operatorname{sech} \alpha$ e $\overline{DE} = |\operatorname{cossech} \alpha|$. A Figura 5 ilustra o caso $\alpha > 0$ e a Figura 6, o caso $\alpha < 0$.



Fonte: Santos (2014).



Fonte: Santos (2024).

Para mostrar esse fato, primeiramente, mostremos que $\overline{EX'} = |\operatorname{senh} \alpha|$. De fato, pois $DX' \perp OE$, já que DX' tangencia S^1 em E , $\overline{OE} = 1$, e $\overline{OX'} = \cosh \alpha$, pelo Teorema de Pitágoras,

$$\overline{EX'}^2 + 1^2 = \overline{OX'}^2, \text{ isto é, } \overline{EX'}^2 = \cosh^2 \alpha - 1. \quad (4)$$

Aplicando a identidade fundamental da trigonometria hiperbólica em (4), obteremos:

$$\overline{EX'}^2 = \operatorname{senh}^2 \alpha, \text{ isto é, } \overline{EX'} = |\operatorname{senh} \alpha|. \quad (5)$$

Visto que $X'\hat{O}D$ é reto, e $OE \perp DX'$, temos que $\overline{DE} \cdot \overline{EX'} = \overline{OE}^2 = 1$. Segue deste fato e de (5) que:

$$\overline{DE} = \frac{1}{|\operatorname{senh} \alpha|}. \quad (6)$$

Os ângulos $O\hat{E}C$ e $C\hat{E}X'$ são tais que $O\hat{E}C + C\hat{E}X' = 90^\circ$ ($O\hat{E}X'$ é reto); por outro lado, $C\hat{E}X' + C\hat{X}'E = 90^\circ$ (são ângulos complementares). Logo, $C\hat{X}'E \equiv O\hat{E}C$. Como os $\triangle OCE$ e $\triangle OEX'$ retos em C e E , respectivamente, conclui-se que $\triangle OCE \sim \triangle OEX'$. Daí,

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OX'}}, \text{ isto é, } \frac{\overline{OC}}{1} = \frac{1}{\cosh \alpha}. \quad (7)$$

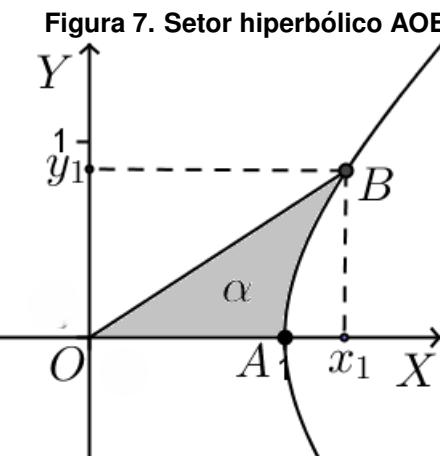
Portanto, dos resultados obtidos em (6) e em (7), respectivamente, conclui-se que:

$$\overline{DE} = |\operatorname{cossech} \alpha| \quad \text{e} \quad \overline{OC} = \operatorname{sech} \alpha.$$

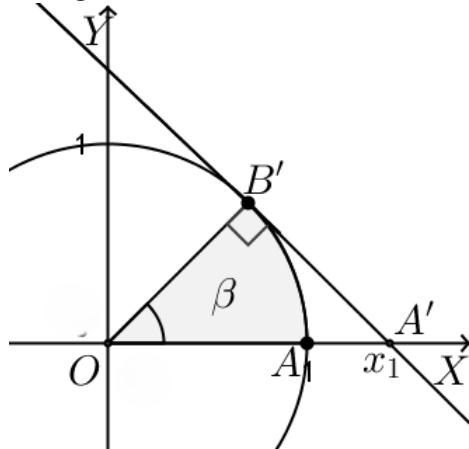
4. Conexão entre trigonometria hiperbólica e trigonometria circular

Nesta seção, tem-se o objetivo de identificar uma conexão entre a trigonometria hiperbólica e a trigonometria circular.

Inicialmente, considere o ramo direito da hipérbole equilátera $H : x^2 - y^2 = 1$ e os pontos $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ e $B(x_1, y_1)$ com $x_1 > 1$. Consideremos o caso $y_1 > 0$; o caso $y_1 < 0$ segue de modo análogo. O dobro da medida da área do setor hiperbólico AOB segue com a mesma denotação α . Observe que $\alpha > 0$. Considere agora a circunferência $S^1 : x^2 + y^2 = 1$ e B' no primeiro quadrante, o ponto de intersetção da reta tangente a S^1 que passa por $A'(x_1, 0)$. Seja β o dobro da medida da área do setor circular AOB' . Observe que $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ e a medida, em radianos, de $A\hat{O}B'$ é β . A primeira e a segunda situações estão ilustradas, nesta ordem, pelas Figuras 7 e 8.



Fonte: Santos (2014).

Figura 8. Setor circular AOB'


Fonte: Santos (2014)

Da definição de cosseno hiperbólico,

$$x_1 = \cosh \alpha. \quad (8)$$

Por outro lado, da trigonometria no triângulo retângulo, teremos:

$$x_1 = \sec \beta. \quad (9)$$

De (8) e (9), teremos

$$\cosh \alpha = \sec \beta. \quad (10)$$

Sendo

$$\operatorname{tg}^2 \beta = \sec^2 \beta - 1 \quad (11)$$

e

$$\operatorname{senh}^2 \alpha = \cosh^2 \alpha - 1. \quad (12)$$

Então, de (10), (11) e (12), segue que

$$\operatorname{senh}^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \beta, \text{ isto é, } \operatorname{senh} \alpha = \operatorname{tg} \beta. \quad (13)$$

E de (10) e (13), obtem-se que

$$\operatorname{tgh} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sec \beta}, \text{ isto é, } \operatorname{tgh} \alpha = \operatorname{sen} \beta. \quad (14)$$

e

$$\operatorname{cotgh} \alpha = \frac{\sec \beta}{\operatorname{tg} \beta}, \text{ isto é, } \operatorname{cotgh} \alpha = \operatorname{cossec} \beta. \quad (15)$$

Por fim, de (10)

$$\operatorname{sech} \alpha = \frac{1}{\sec \beta}, \text{ isto é, } \operatorname{sech} \alpha = \operatorname{cos} \beta. \quad (16)$$

E de (13)

$$\operatorname{cossech} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}, \text{ isto é, } \operatorname{cossech} \alpha = \operatorname{cotg} \beta. \quad (17)$$

As igualdades obtidas em (10), (13), (14), (15), (16) e (17) apresentam uma conexão entre a trigonometria hiperbólica e a trigonometria circular. Mais precisamente, relaciona a área de um setor hiperbólico com a área de um setor circular.

5. Explicitando a função α e as fórmulas das razões trigonométricas hiperbólicas

Nosso principal objetivo nesta seção é determinar as fórmulas matemáticas das razões trigonométricas hiperbólicas do argumento α . Mais precisamente, as fórmulas para o seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante hiperbólicas.

Inicialmente vamos rotacionar de um ângulo θ , $\vec{e}_1 = (1, 0)$ e $\vec{e}_2 = (0, 1)$, vetores ortonormais na direção OX e OY , respectivamente, no sentido horário, para obtermos um novo sistema $OY'X'$.

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Portanto, $\vec{v}_1 = (\cos \theta, -\operatorname{sen} \theta)$ e $\vec{v}_2 = (\operatorname{sen} \theta, \cos \theta)$ com $\theta \in \mathbb{R}$.
Seja $P = (x, y)$, como \vec{v}_1 e \vec{v}_2 são ortonormais, existem números $x', y' \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{OP} = x' \vec{v}_1 + y' \vec{v}_2. \quad (20)$$

Logo, x' e y' são coordenadas do ponto P com relação ao sistema $OY'X'$. Como

$$(x, y) = x' \vec{v}_1 + y' \vec{v}_2 \quad (21)$$

temos que

$$\begin{cases} x = \cos \theta x' + \operatorname{sen} \theta y' \\ y = -\operatorname{sen} \theta x' + \cos \theta y' \end{cases} \quad (22)$$

Ou seja,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Assim, seja $B \in H$ na Definição 2.1. No sistema OYX , tem-se $B(x, y)$. Considere $\theta = \frac{\pi}{4}$ em (24), isto é, uma rotação no sentido horário, consequentemente, no sistema $OY'X'$, tem-se $B(x', y')$ de modo que:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y = x' \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y = y' \end{cases} \quad (25)$$

Do sistema de equações (25), teremos:

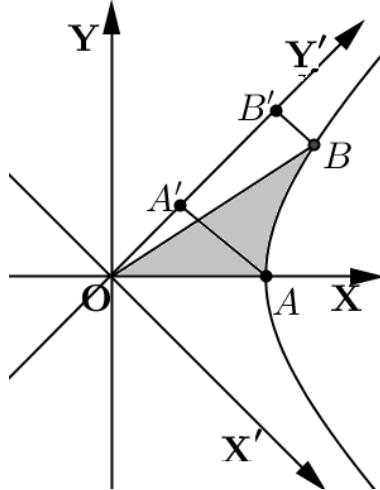
$$x' \cdot y' = \frac{1}{2}. \quad (26)$$

Ou seja, no sistema $OY'X'$, obtemos $H' = \{(x', y') | x' \cdot y' = \frac{1}{2}\}$.

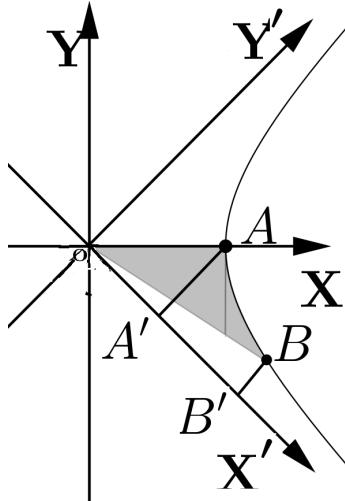
Definição 5.1. Sejam os pontos $A(1, 0), B(x, y) \in H'$. Considere $y > 0$ e A' e B' sendo as projeções de A e B , respectivamente, no eixo OY' ; considere também $y < 0$ e A' e B' sendo as projeções de A e B , respectivamente, no eixo OX' ; definimos por região $AA'B'B$ a região limitada por H' e a poligonal aberta $AA'B'B$.

As Figuras 9 e 10 ilustram os casos $y > 0$ e $y < 0$, respectivamente, da Definição 5.1.

Figura 9. Triângulo OBB', $y > 0$



Fonte: Adaptado, Carvalho (2005).

Figura 10. Triângulo OBB', $y < 0$


Fonte: Adaptado, Santos (2014)

De ambos os casos da Definição 5.1, tem-se $\overline{OA'} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \overline{A'A}$. Daí, a área do triângulo retângulo $AA'O$ mede $\frac{1}{4}$.

Para o caso $y > 0$, $\overline{BB'} = x'$ e $\overline{OB'} = y'$. Desta forma, considerando (26), conclui-se que a área do triângulo retângulo OBB' mede:

$$\frac{x' \cdot y'}{2} = \frac{1}{4}. \quad (27)$$

Para o caso $y < 0$, $\overline{BB'} = y'$ e $\overline{OB'} = x'$. Desta forma, considerando (26), conclui-se que a área do triângulo retângulo OBB' mede:

$$\frac{x' \cdot y'}{2} = \frac{1}{4}. \quad (28)$$

Ou seja, $AA'O$ e OBB' possuem áreas iguais.

Denotando por

$$A_{(AA'B'B)}, A_{(AOB'B)}, A_{(AOB)}, A_{(AOA')} \text{ e } A_{(BOB')}$$

as áreas: da região $AA'B'B$; das regiões limitadas: por H' e a poligonal aberta $AOB'B$; por H' e a poligonal aberta AOB ; pelo triângulo AOA' ; e pelo triângulo BOB' , respectivamente, temos:

$$\begin{cases} A_{(AOA')} + A_{(AA'B'B)} &= A_{(AOB'B)} \\ A_{(AOB)} + A_{(BOB')} &= A_{(AOB'B)} \end{cases} \quad (29)$$

Portanto, dado que $A_{(AOA')} = A_{(BOB')}$, segue de (29) o resultado a seguir

$$A_{(AOB)} = A_{(AA'B'B)}. \quad (30)$$

Precisa-se calcular a medida da área da região $AA'B'B$.

Inicialmente, consideremos o lugar geométrico

$$H'' = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right); x > 0 \right\}, \quad (31)$$

que é o ramo positivo da hipérbole equilátera $xy = 1$, e estudar a área da região limitada por esse ramo hiperbólico, pelo eixo OX . Para realizar o cálculo da referida área precisamos da seguinte proposição, cuja a demonstração encontra-se em Lima et. al (2006, v.1, p. 2018 - 2022).

Proposição 5.1. Dado o lugar geométrico H'' e definindo por faixa hiperbólica H''_a^b a região limitada superiormente por H'' , inferiormente por OX e lateralmente pelas retas $x = a$ e $x = b$, então a área da região H''_1^x é dada pela função f tal que

$$f(x) = \ln x, \forall x \in \mathbb{R}^+,$$

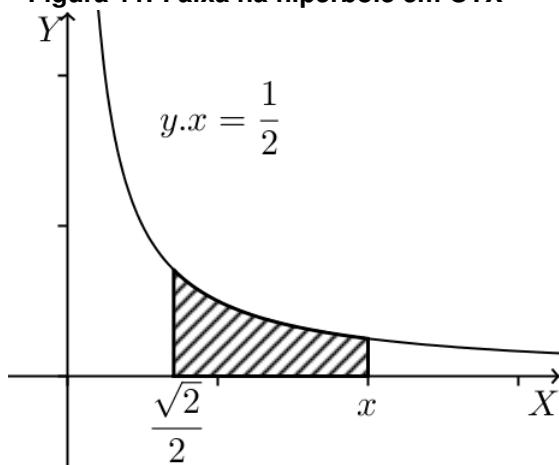
onde $\ln x = \log_e x$.

Calculemos, agora, a área da região $AA'B'B$. Consideremos o lugar geométrico

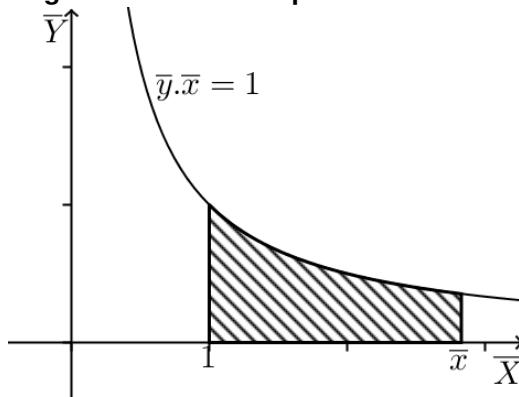
$$H''' = \left\{ \left(x, \frac{1}{2x} \right); x > 0 \right\},$$

e tomemos a faixa $H''_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{x}}$. Seja também a faixa $H''_1^{\bar{x}}$ na hipérbole $\bar{x}\bar{y} = 1$, onde $\bar{x} = \sqrt{2}x$ e $\bar{y} = \sqrt{2}y$. Sendo assim, observa-se que $H''_1^{\bar{x}}$ é uma transformação (ampliação) da faixa $H''_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{x}}$. O fator de ampliação é $\sqrt{2}$, isto é, $H''_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{x}}$ e $H''_1^{\bar{x}}$ representam regiões (figuras) semelhantes de razão de semelhança igual a $\sqrt{2}$. Ver as Figuras 11 e 12.

Figura 11. Faixa na hipérbole em OYX



Fonte: Santos (2014).

Figura 12. Faixa na hipérbole em $O\bar{Y}\bar{X}$


Fonte: Santos (2014).

Nomeando por A e \bar{A} as áreas das faixas $H''_{\sqrt{2}/2}^x$ e $H''_1^{\bar{x}}$, respectivamente e considerando que “a razão entre áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança” (LIMA, 2006, p. 106), tem-se que:

$$A = \frac{1}{2}\bar{A}. \quad (32)$$

Por outro lado, pela Proposição 5.1, $\bar{A} = \ln \bar{x}$, e sendo $\bar{x} = \sqrt{2}x$, por (32) obteremos

$$A = \frac{1}{2}\ln \sqrt{2}x. \quad (33)$$

Retomamos a região $AA'B'B$. Considerando a Definição 5.1, as faixas hiperbólicas de que trata a Proposição 5.1 para a região $AA'B'B$ no sistema $OX'Y'$ são:

1. Se $y \geq 0$, temos a faixa $H'^x_{\sqrt{2}/2}$, isto é, $A_{(AA'B'B)} = \frac{1}{2}\ln \sqrt{2}x'$;
2. Se $y < 0$, temos a faixa $H'^y_{\sqrt{2}/2}$, isto é, $A_{(AA'B'B)} = \frac{1}{2}\ln \sqrt{2}|y'|$.

Relembrando que $A_{(AA'B'B)} = A_{[AO(x,y)]}$, considerando o resultado anterior e (25), conclui-se que:

$$A_{[AO(x,y)]} = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \right) = \frac{1}{2}\ln(x+y), & \text{se } y \geq 0 \\ \frac{1}{2}\ln \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \right) = \frac{1}{2}\ln(x-y), & \text{se } y < 0. \end{cases} \quad (34)$$

Pela Definição 2.1, segue de (34) que:

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \ln(x+y), & \text{se } y \geq 0 \\ -\ln(x-y), & \text{se } y < 0 \end{cases} \quad (35)$$

Pretende-se determinar as fórmulas matemáticas das razões trigonométricas hiperbólicas em função do argumento α . Para isso, tomemos a equação que apresenta α em termos de $x = \cosh \alpha$ e de $y = \operatorname{senh} \alpha$, mostrada anteriormente. Além disso, considerando que:

1. $\ln \beta^k = k \ln \beta$ para todo $k, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\beta > 0$;
2. se $(x, y) \in D(\alpha)$, então $(x + y)^{-1} = (x - y)$;
3. a exponencial de base e é a função inversa do logaritmo natural (\ln).

Então,

$$\begin{cases} \ln(x + y) = \alpha & \text{se, e somente se,} \\ \ln(x - y) = -\alpha & \end{cases} \quad \begin{cases} \cosh \alpha + \operatorname{senh} \alpha = e^\alpha \\ \cosh \alpha - \operatorname{senh} \alpha = e^{-\alpha} \end{cases} \quad (36)$$

Resolvendo o sistema de equações da direita dado em (36), obteremos:

$$\cosh \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{senh} \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}. \quad (37)$$

A partir das igualdades dadas em (37), tem-se que as fórmulas para a tangente, a cotangente, a secante e a cossecante hiperbólicas são:

$$\begin{array}{lll} \operatorname{tgh} \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}} & \text{ou} & \operatorname{tgh} \alpha = \frac{e^{2\alpha} - 1}{e^{2\alpha} + 1}; \\ \operatorname{cotgh} \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}} & \text{ou} & \operatorname{cotgh} \alpha = \frac{e^{2\alpha} + 1}{e^{2\alpha} - 1}; \\ \operatorname{sech} \alpha = \frac{2}{e^\alpha + e^{-\alpha}} & \text{ou} & \operatorname{sech} \alpha = \frac{2e^\alpha}{e^{2\alpha} + 1}; \\ \operatorname{cossech} \alpha = \frac{2}{e^\alpha - e^{-\alpha}} & \text{ou} & \operatorname{cossech} \alpha = \frac{2e^\alpha}{e^{2\alpha} - 1}. \end{array}$$

6. Funções trigonométricas hiperbólicas

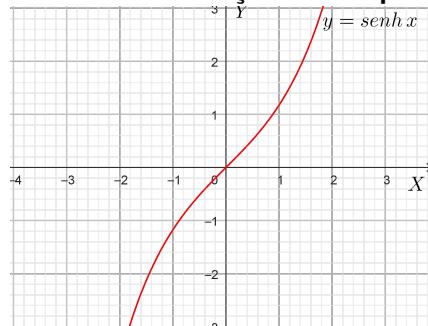
Nesta seção, o objetivo é apresentar as funções trigonométricas hiperbólicas canônicas de domínio \mathbb{R} ou o maior subconjunto possível de \mathbb{R} . Será feita também a representação gráfica de cada função. Os gráficos apresentados foram obtidos utilizando o Software GeoGebra, contudo, podem ser construídos com as técnicas do Cálculo Diferencial.

Definição 6.1. A função trigonométrica seno hiperbólico $\operatorname{senh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Propriedade 6.1. A função seno hiperbólico é:

1. uma função ímpar;
2. é bijetora;
3. é uma função estritamente crescente.

Figura 13. Gráfico da função seno hiperbólico


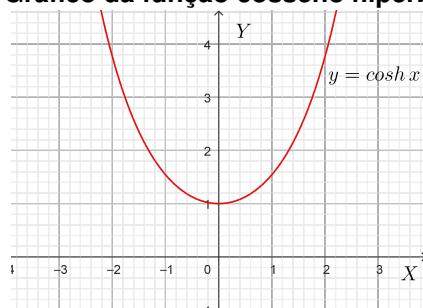
Fonte: Santos (2014).

Definição 6.2. A função trigonométrica cosseno hiperbólico $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Propriedade 6.2. A função cosseno hiperbólico é tal que:

1. $\cosh x = 1$ se, e somente se, $x = 0$;
2. sua imagem é o intervalo $[1, +\infty)$;
3. \cosh é uma função par;
4. \cosh é estritamente decrescente em $(-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty)$.

Figura 14. Gráfico da função cosseno hiperbólico


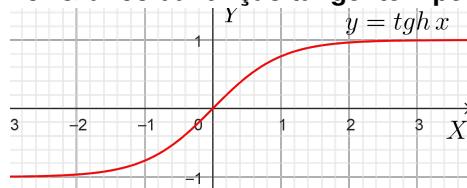
Fonte: Santos (2014)

Definição 6.3. A função tangente hiperbólica $\tgh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tgh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Propriedade 6.3. A função tangente hiperbólica é tal que:

1. é uma função ímpar;
2. é injetiva;
3. é uma função estritamente crescente;
4. sua imagem é o intervalo $(-1, 1)$.

Figura 15. Gráfico da função tangente hiperbólica


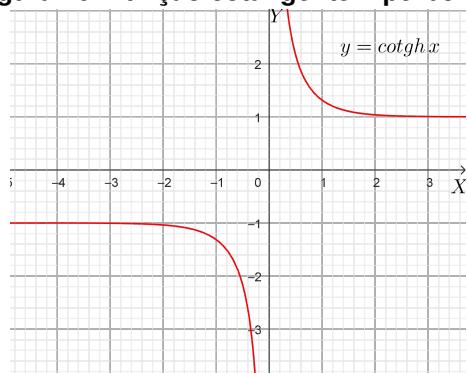
Fonte: Santos (2014)

Definição 6.4. A função cotangente hiperbólica $\text{cotgh} : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \text{cotgh } x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Propriedade 6.4. A função cotangente hiperbólica é tal que:

1. é uma função ímpar;
2. é injetiva;
3. é uma função estritamente decrescente em \mathbb{R}_- e em \mathbb{R}_+ , mas não é monótona em \mathbb{R}^* ;
4. sua imagem é o intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Figura 16. Função cotangente hiperbólica


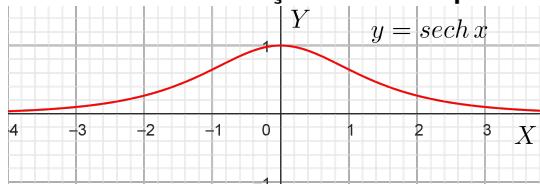
Fonte: Santos (2014)

Definição 6.5. A função secante hiperbólica $\text{sech} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{sech } x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}.$$

Propriedade 6.5. A função secante hiperbólica é tal que:

1. é uma função par;
2. a sua imagem é o intervalo $(0, 1]$;
3. é estritamente crescente em \mathbb{R}_- e estritamente decrescente \mathbb{R}_+ .

Figura 17. Gráfico da função secante hiperbólica

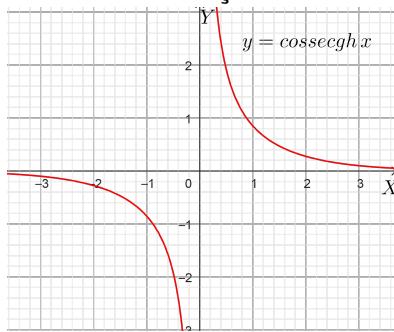
Fonte: Santos (2014)

Definição 6.6. Define-se a função cossecante hiperbólica cossech : $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \text{ cossech } x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

Propriedade 6.6. A função cossecante hiperbólica é tal que:

1. é uma função ímpar;
2. é uma função injetiva;
3. cossech é estritamente decrescente nos intervalos \mathbb{R}_- e \mathbb{R}_+ , mas não é monótona em \mathbb{R}^* ;
4. a imagem de cossech é o conjunto \mathbb{R}^* .

Figura 18. Gráfico da função cossecante hiperbólica

Fonte: Santos (2014)

7. Considerações finais

Neste artigo, foi desenvolvido um texto apoiando-se somente em recursos elementares da matemática e diferenciando daqueles que normalmente encontramos na literatura. Na construção da trigonometria hiperbólica em \mathbb{R} , foram utilizados apenas elementos da Geometria Euclidiana Plana, Geometria Analítica e Logaritmos. Pode-se dar continuidade ao estudo das funções hiperbólicas inversas e suas propriedades. Portanto, acreditamos que o estudo apresentado neste artigo venha contribuir para o enriquecimento acadêmico tanto de alunos quanto de professores que estejam envolvidos em projetos de iniciação científica e disciplinas específicas da área de matemática e suas tecnologias.

Referências

CARVALHO, Sônia Pinto de. As Funções Hiperbólicas. Disponível em:
<https://www.yumpu.com/pt/document/read/14350415/as-funcoes-hiperbolicas-departamento-de-matematica>. Acesso em 26/08/2025.

LIMA, Elon Lages. Logaritmos: Coleção do Professor de Matemática. 5.ed. Rio de Janeiro: SBM, (2013).

LIMA, Elon Lages. Medida e forma em geometria: Coleção do Professor de Matemática. 4.ed. Rio de Janeiro: SBM, (2006).

LIMA, Elon Lages et al. A matemática do ensino médio: Coleção Professor de Matemática. v.1. 9.ed. Rio de Janeiro: SBM, (2006).

MCMAHON, James. Hyperbolic functions. 4.ed. New York: John Wiley & Sons, (1906).

MINGORANCI, Marcos Rogério. Uma introdução à trigonometria hiperbólica e sua aplicação no ensino médio. Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2016. Disponível em:
<https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/2871>. Acesso em 18/08/2025.

SANTOS, Admilson Alves dos. Trigonometria hiperbólica: uma abordagem elementar, 2014. 150p: Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Roraima, Boa Vista, 2014. Disponível em:
https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc.php.

STEWART, James. Cálculo. v.1. Traduzido por Antonio Carlos Moretti e Antonio Carlos Gilli Martins. 6.ed. São Paulo: Cengage Learning, (2009).

VASCONCELOS, Jerry Gleison Salgueiro Fidanza. Funções hiperbólicas: história, conceito e aplicação, 2013. 66f: Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)-Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2013. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc.php. Acesso: 18/08/2025.