RCT - REVISTA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
www.revista.ufrr.br/rct

Análises gráficas e algébricas das repercussões decorrentes da variação dos coeficientes da função quadrática

Elzimar de O. Rufino [1], Kelly Karina Santos[2], Luciano Ferreira Silva[3]

[1]Departamento de Matemática- UFRR
elzimar.rufino@ufrr.br

[2]Departamento de Matemática - UFRR
kelly.karina@ufrr.br

[3]Departamento de Ciência da Computação - UFRR
luciano.silva@ufrr.br

Abstract. *TIn this work we will investigate the behavior of a fixed point of the parabola by varying the coefficients a, b and c of the quadratic function $f(x) = ax^2 + bx + c$ varyThe results improve previous studies for the case of the vertex of the parabola and expand them to any point, not necessarily the vertex. This in-depth analysis allows for a better understanding of the influence of the coefficients of the quadratic function on the geometry of the curve described by a point that changes as these coefficients vary.*

Resumo. *Neste trabalho o comportamento de um ponto fixado da parábola ao variar os coeficientes a, b e c da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Os resultados aprimoram estudos anteriores para o caso do vértice da parábola e os expande para um ponto qualquer, não necessariamente o vértice. Essa análise aprofundada permite compreender melhor a influência dos coeficientes da função quadrática na geometria da curva descrita por um ponto que se altera conforme a variação desses coeficientes.*

1. Introdução

A função quadrática, também conhecida como função polinomial do segundo grau, ou função do segundo grau, é uma das funções mais antigas e fundamentais da matemática. Ela é representada por uma expressão do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, e sua representação gráfica é uma parábola. Essa função tem sido estudada desde a antiguidade e muitos matemáticos famosos, como Arquimedes, Apolônio e Al-Khwarizmi, contribuíram para o seu desenvolvimento. Conforme BOYER em [4], o estudo das parábolas remonta à Grécia Antiga, onde outros matemáticos como Euclides contribuíram significativamente para o avanço do conhecimento sobre as parábolas. Apolônio, por exemplo, é conhecido por suas obras sobre cônicas, incluindo parábolas, e suas contribuições foram fundamentais para o desenvolvimento da geometria analítica. No entanto, foi apenas no século XVII, com o surgimento do cálculo diferencial e integral, que a função quadrática foi completamente formalizada e compreendida.

Nos dias atuais, o uso de tecnologias tem facilitado significativamente a representação e compreensão de funções quadráticas. Com o advento dos computadores e softwares especializados em matemática, como o Geogebra e o Wolfram Alpha, ficou muito mais fácil plotar gráficos de funções e analisar seu comportamento.

Além disso, as calculadoras gráficas e os aplicativos de matemática para smartphones também têm contribuído para popularizar o estudo das funções quadráticas, tornando-as mais acessíveis e compreensíveis para estudantes e profissionais da área.

Em resumo, a evolução do estudo das funções ao longo do tempo foi marcada pela contribuição de diversos matemáticos e pela ajuda das tecnologias, que facilitaram sua compreensão e aplicação em diversos campos da matemática e da ciência.

Estudos recentes exploram a variação do gráfico de uma função quadrática em função da variação dos coeficientes a, b e c da expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$. LOPES e MORAES em [3], relatam uma experiência com alunos do primeiro ano do ensino médio utilizando a ferramenta *Controle deslizante* do software geogebra. Na experiência são analizadas as variações da parábola decorrentes das variações dos coeficientes a e b. No caso da variação do coeficiente b chegam à conclusão de que o vértice descreve uma parábola de equação $f(x) = -ax^2 + c$. Por outro lado, SOUSA em [2], descreve o comportamento do vértice quando são variados os coeficientes a, b e c. Resumidamente, ele mostra que quando $b \neq 0$ e é variado o coeficiente a, o vértice descreve a reta $f_v(x) = \frac{bx}{2} + c$. No caso em que $b = 0$, $V = (0, c)$ e este não se altera. Na variação do coeficiente b, ele mostra que o vértice descreve a parábola $f_v(x) = -ax^2 + c$. Finalmente, quando o coeficiente c varia, o vértice descreve a reta vertical $x = \frac{-b}{2a}$.

Este trabalho, assim como o de SOUSA em [2], também foi motivado pela observação visual do comportamento gráfico da função quadrática no Geogebra. Contudo, nós conseguimos realizar e apresentar uma análise do caso do comportamento do vértice de forma mais simples do que a feita por SOUSA em [2] e ampliamos a análise do comportamento gráfico de um ponto da parábola, distinto do vértice, descrita por $f(x) = ax^2 + bx + c$, ao variarmos os coeficientes a, b e c.

2. Preliminares

Nesta seção são expostos alguns pré-requesitos matemáticos necessários ao entendimento do trabalho.

Começaremos com a definição de função quadrática, essencial neste trabalho.

Definição 2.1. *Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada de função quadrática quando existirem números reais a, b e c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 2.1. *A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -3x^2 - 5x + 8$, é uma função quadrática.*

Outro conceito importante para este desenvolvimento é o conceito de parábola, o qual está diretamente relacionado ao gráfico de uma função quadrática [1]. A seguinte definição de parábola pode ser vista em [1].

[1]Euclides abordou as parábolas em seus escritos sobre geometria, como em seu "Elementos". Ele descreveu as propriedades das seções cônicas e estabeleceu relações entre elas, contribuindo para a compreensão das parábolas e sua aplicação em problemas geométricos. No livro "Conics", Apolônio descreveu as propriedades das seções cônicas, incluindo a parábola, e estabeleceu relações entre suas diferentes formas. Seus estudos ajudaram a expandir o conhecimento matemático da época e influenciaram muitos matemáticos posteriores. Sugerimos a referência [4].

Definição 2.2. *Dado um ponto F e uma reta d, pertencentes a um plano α, com $F \notin d$, seja p a distância entre F e d. Define-se parábola com foco F e reta diretriz d ao conjunto dos pontos de α que estão à mesma distância de F e d.*

Se uma parábola tem como diretriz uma reta de equação $y = -\frac{p}{2}$ e foco o ponto $F(0, \frac{p}{2})$ sua equação será $x^2 = 2py$. De fato: da definição teremos que se P é um ponto que pertence à parábola então

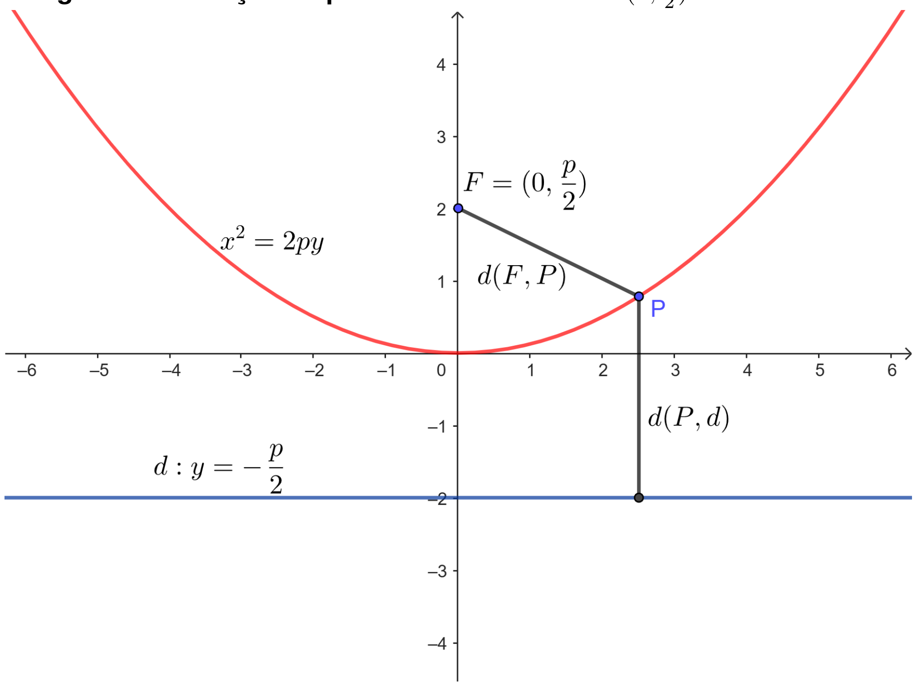
$$d(P, F) = d(P, d)$$

Disto temos:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y - \frac{p}{2})^2} = y + \frac{p}{2};$$
$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4};$$
$$x^2 = 2py.$$

A Figura 1 mostra a descrição de uma parábola.

Figura 1. Descrição da parábola com foco $F = (0, \frac{p}{2})$ e reta diretriz d.



Fonte: Figura construída pelos autores com o auxílio do sofware Geogebra.

A reta que passa pelo foco da parábola e é perpendicular à sua diretriz é denominada eixo da parábola.O ponto de interseção da Parábola com o eixo é denominado o vértice da parábola. Na situação descrita acima o vértice da parábola é a origem do sistema cartesiano.

De forma mais geral, fixado um sistema de eixos ortognais OXY, se uma parábola tem diretriz paralela ao eixo das abscissas e vértice $V(m, n)$ sua equação será dada por

$$(x - m)^2 = 2p(y - n).$$

Isto decorre do fato de que esta parábola pode ser obtida por meio de uma translação de outra parábola cujo vértice é a origem do sistema. Desenvolvendo a equação acima encontramos

$$y = ax^2 + bx + c,$$

onde $a = \dfrac{1}{2p}$, $b = -\dfrac{m}{p}$ e $c = \dfrac{m^2}{2p} + n$ ou seja, esta parábola é o gráfico de uma função quadrática. Reciprocamente, se temos $y = ax^2 + bx + c$ então o gráfico desta função é uma parábola. De fato,

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ y &= a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c \\ y &= a(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}) + c \\ y &= a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ y &= a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

Portanto, temos $\frac{1}{a}(y - \frac{b^2-4ac}{4a}) = (x - (-\frac{b}{2a}))^2$, ou seja, o gráfico é uma parábola cujo vértice é o ponto $V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$. A compreensão sobre o gráfico de uma função quadrática é um passo importante neste estudo[2].

Faremos, a seguir, algumas observações úteis:

Lema 2.1. *Seja b um número real. Então, dado o número $s \in \mathbb{R}$, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $s = b + k$.*

Demonstração. Basta fazer $k = b - s$. □

Como uma aplicação do Lema 2.1 temos o seguinte resultado sobre um ponto da parábola.

Lema 2.2. *Qualquer ponto P da parábola dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser posto em função do termo a, do termo b ou do termo c.*

Demonstração. Todos os casos são análogos. Seja $(r, f(r))$ um ponto qualquer da parábola. Pelo Lema 2.1, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $r = b + k$. Logo, podemos escrever $(r, f(r)) = (b + k, f(b + k))$. □

Na seguinte observação, $\Delta = b^2 - 4ac$.

[2]Conforme pode ser visto em BOYER [4], ao longo da história, os estudos sobre parábolas continuaram a evoluir, com contribuições de matemáticos como Johannes Kepler, Pierre de Fermat e René Descartes, que aplicaram métodos analíticos para estudar essas curvas. Esses avanços foram fundamentais para o desenvolvimento da geometria analítica e para a aplicação das parábolas em diversas áreas da matemática e da física.

Observação 2.1. *Neste trabalho, o caso do vértice* $V = (-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$, *é considerado separadamente. Para um ponto distinto do vértice consideraremos* $(a+k, f(a+k)), (b+k, f(b+k))$ *ou* $(c+k, f(c+k))$.

Observação 2.2. *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *a função quadrática definida pela lei de associação* $f(x) = ax^2 + bx + c$. *Então, variando o coeficiente* a, *o coeficiente* b, *o coeficiente* c, *em* $\mathbb{R}$, *obtemos respectivamente, as famílias* $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}, (f_b)_{b\in\mathbb{R}}, (f_c)_{c\in\mathbb{R}}$ *de funções quadráticas. Como consequência temos, respectivamente, famílias de parábolas* $(P_a)_{a\in\mathbb{R}}$, $(P_b)_{b\in\mathbb{R}}$ *e* $(P_c)_{c\in\mathbb{R}}$.

3. Resultados e discussão.

Nesta seção serão apresentados os resultados do trabalho. Esses resultados generalizam aqueles obtidos por SOUSA em [2], que descrevem a trajetória do vértice ao variar os coeficientes a, b e c de uma função quadrátiva da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Aqui analisaremos a trajetória de um ponto qualquer da parábola, não se limitando apenas ao vértice.

A seguinte proposição faz uma análise da variação do coeficiente a. A prova para o caso do vértice da parábola foi feita por $SOUSA$ em [2]. No entanto, tal prova é extensa. Nosso trabalho apresenta uma prova alternativa bem mais simples. Além disso, ampliamos o resultado para o caso mais geral de um ponto $(a+k, f(a+k))$.

Proposição 3.1. *Considere* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função quadrática cuja lei de definição é* $f(x) = ax^2 + bx + c$, *com* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$ *e* $b \neq 0$. *Variando o coeficiente* a *em* $\mathbb{R}$, *os vértices* $V_a = (-b/2a, f_a(-b/2a))$ *das parábolas determinadas pelas funções* f_a, *descrevem uma reta, menos um ponto. Além disso, os pontos* $(a+k, f_a(a+k))$ *distintos dos vértices* V_a *descrevem uma cúbica.*

Demonstração. Vamos escrever o ponto $V_a = (\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a}))$ na forma $(s, h(s))$, para alguma função h. Basta fazer $s = \frac{-b}{2a}$, ou seja, $a = \frac{-b}{2s}$. Deste modo,

$$\begin{aligned} h(s) &= f_a(\frac{-b}{2a}) \\ &= \frac{4(\frac{-b}{2s})c - b^2}{\frac{-b}{2s}} = \frac{b}{2}s + c. \end{aligned}$$

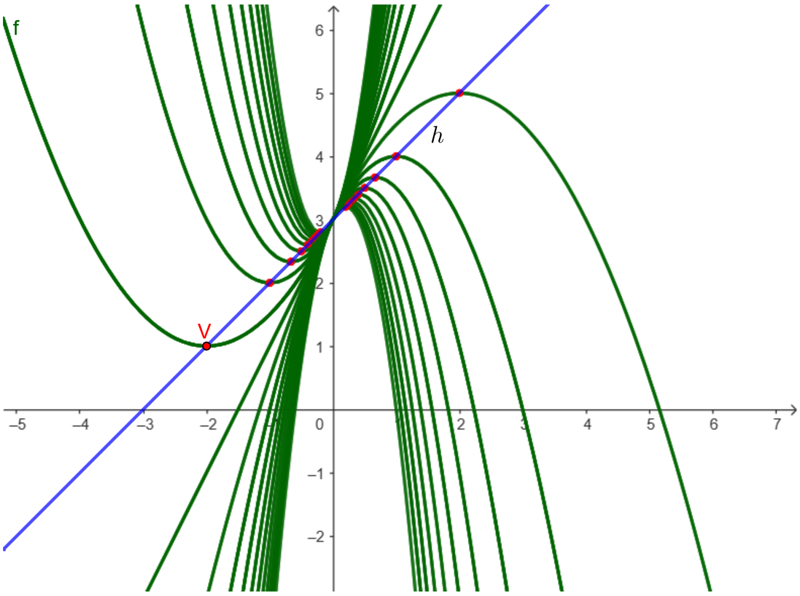
Isso mostra que os vértices V_a descrevem a reta de equação $h(s) = \frac{b}{2}s + c$, exceto o ponto $(0, c)$. Para finalizar, vamos escrever $(a+k, f_a(a+k))$ na forma $(s, h(s))$, para alguma função h. Basta fazer $s = a + k$, ou seja, $a = s - k$. Deste modo,

$$\begin{aligned} h(s) &= f_a(a+k) \\ &= a(a+k)^2 + b(a+k) + c \\ &= (s-k)s^2 + bs + c \\ &= s^3 - ks^2 + bs + c. \end{aligned}$$

Isso mostra que os pontos $(a+k, f_a(a+k))$ descrevem a cúbica $h(s) = s^3 - ks^2 + bs + c$. Com isso, concluímos a demonstração da proposição. □

Exemplo 3.1. *Seja* $f(x) = ax^2 + 2x + 3$. *Variando o coeficiente* a, *os vértices* $(-\frac{1}{a}, f_a(-\frac{1}{a}))$ *descrevem a reta de equação* $h(s) = s + 3$, *exceto o ponto* $(0, 3)$. *Veja a Figura 2.*

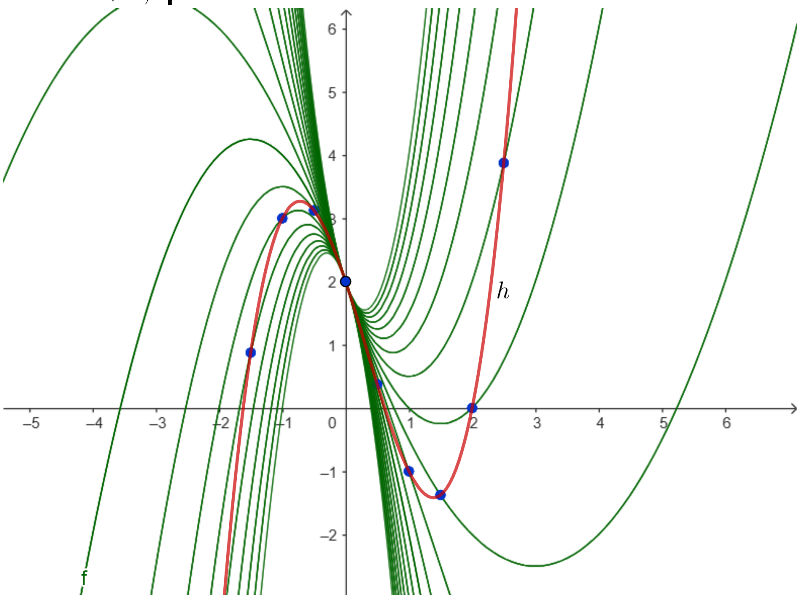
Figura 2. Reta $h(s) = s + 3$ **menos** $(0, 3)$ **descrita pelos vértices de** $f_a(x) = ax^2 + 2x + 3$, **ao variarmos o coeficiente** a.



Fonte: Figura construída pelos Autores com o auxílio do software Geogebra.

Exemplo 3.2. *Seja* $f(x) = ax^2 - 3x + 2$. *Variando o coeficiente* a, *os pontos* $(a+1, f_a(a+1))$ *descrevem a cúbica* $h(s) = s^3 - s^2 - 3s + 2$, *como mostra a Figura 3.*

Figura 3. Cúbica $h(s) = s^3 - s^2 - 3s + 2$, **descrita pelos pontos** $(a + 1, f_a(a + 1))$ **de** $f_a(x) = ax^2 - 3x + 2$, **quando variamos o coeficiente** a.



Fonte: Figura construída pelos Autores com o auxílio do sofware Geogebra.

Na proposição a seguir consideramos a variação do coeficiente b. Para o caso do vértice, conseguimos simplificar as contas feitas por $SOUSA$ em [2]. Além disso, ampliamos o resultado para o caso mais geral dos pontos $(b+k, f_b(b+k))$.

Proposição 3.2. *Considere a função quadrática* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = ax^2 + bx + c$, *com* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$. *Variando o coeficiente* b *em* $\mathbb{R}$, *os vértices* $V_b = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2-4ac)}{4a}\right)$ *das parábolas determinadas por* f_b, *descrevem uma parábola. Além disso, os pontos* $(b+k, f_b(b+k))$ *distintos dos vértices* V_b, *descrevem uma reta ou uma parábola.*

Demonstração. Vamos escrever os vértices $V_b = (\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2-4ac)}{4a})$ na forma $(s, h(s))$, para alguma função h. Basta fazer $s = \frac{-b}{2a}$, ou seja, $b = -2as$. Deste modo,

$$\begin{aligned} h(s) - \frac{(b^2-4ac)}{4a} &= -\frac{(-2as)^2 - 4ac}{4a} \\ &= -as^2 + c. \end{aligned}$$

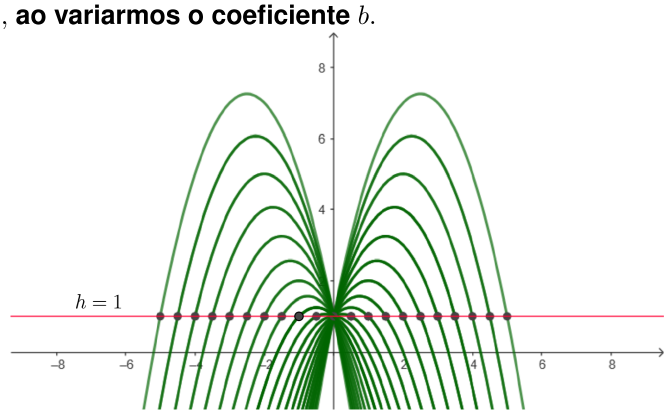
Assim, a função h que procurávamos é definida por $h(s) = -as^2 + c$. Isso mostra que os vértices V_b descrevem uma parábola. Na sequência, vamos escrever o ponto $(b+k, f_b(b+k))$ na forma $(s, h(s))$, para alguma função h. Basta fazer $s = b+k$, ou seja, $b = s-k$. Deste modo,

$$\begin{aligned} h(s) = f_b(b+k) &= a(b+k)^2 + b(b+k) + c \\ &= as^2 + (s-k)s + c \\ &= (a+1)s^2 - ks + c. \end{aligned}$$

Se $a \neq -1$, então os pontos $(b+k, f_b(b+k))$ descrevem a parábola $h(s) = (a+1)s^2 - ks + c$. Caso contrário, se $a = -1$, $(b+k, f_b(b+k))$ descreve a reta $h(s) = -ks + c$. $\square$

Observação 3.1. *No caso em que* $a = -1$ *e* $k = 0$, *temos os pontos* $(b, f_b(b))$. *Por exemplo, se* $f(x) = -x^2 + bx + 1$, *então* $(b, f_b(b)) = (b, 1)$. *Assim,* $h(s) = 1$, *é uma reta horizontal. Veja a Figura 4.*

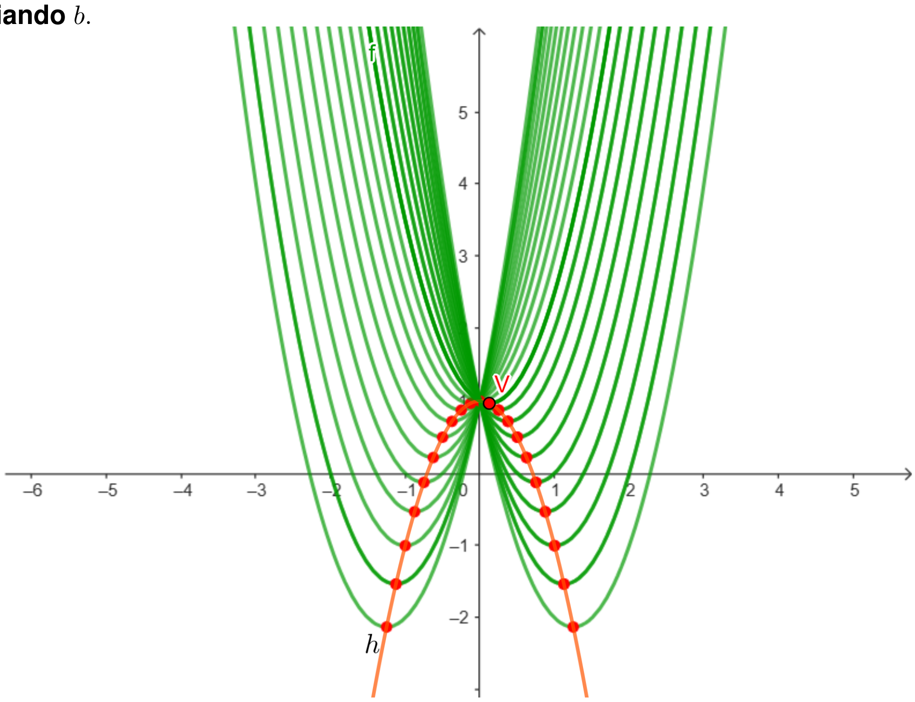
Figura 4. Reta $h(s) = 1$ descrita pelos pontos $(b, f_b(b))$ dos gráficos de $f_b(x) = -x^2 + bx + 1$, ao variarmos o coeficiente b.



Fonte: Figura construída pelos autores com o auxílio do software Geogebra.

Exemplo 3.3. *Seja f a função definida por $f(x) = 2x^2 + bx + 1$, com $b \in \mathbb{R}$ variando. Pela Proposição 3.2, os vértices $V_b = (\frac{-b}{4}, \frac{b^2}{8} - 1)$. de $f_b(x) = 2x^2 + bx + 1$, descrevem a parábola $h(s) = -2s^2 + 1$. Veja a Figura 5.*

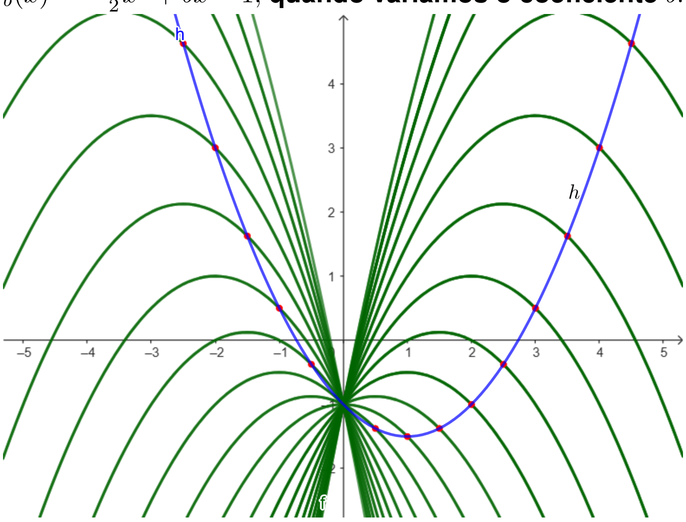
Figura 5. Parábola $h(s) = -2s^2 + 1$ descrita pelos vértices de $f_b(x) = 2x^2 + bx + 1$, variando b.



Fonte: Figura construída pelos autores com o auxílio do software Geogebra.

Exemplo 3.4. *Seja $f(x) = \frac{-1}{2}x^2 + bx - 1$. Variando b, os pontos $(b + 1, f_b(b + 1))$ descrevem a parábola de equação $h(s) = \frac{1}{2}s^2 - s - 1$. Veja a Figura 6.*

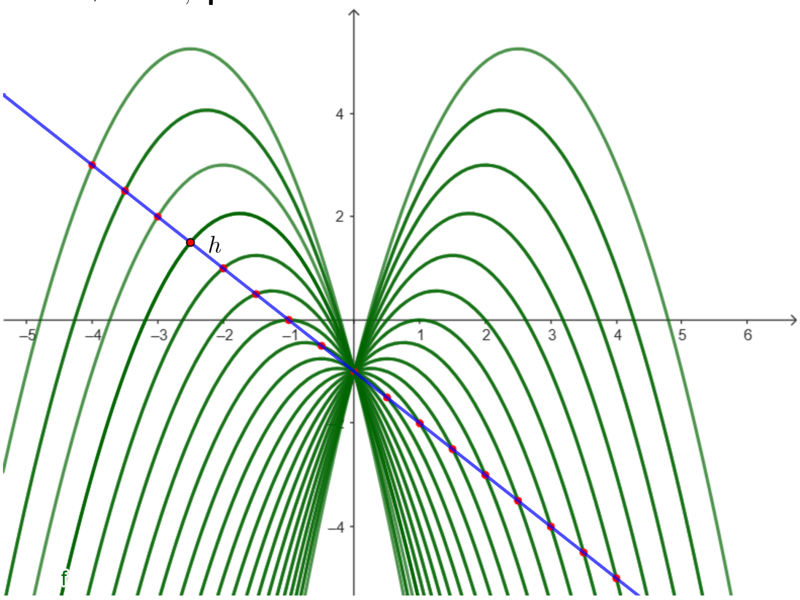
Figura 6. Parábola $h(s) = \frac{1}{2}s^2 - s - 1$, descrita pelos pontos $(b+1, f_b(b+1))$ dos gráficos de $f_b(x) = -\frac{1}{2}x^2 + bx - 1$, quando variamos o coeficiente b.



Fonte: Figura construída pelos autores, com o auxílio do software Geogebra.

Exemplo 3.5. *Seja* $f(x) = -x^2+bx-1$. *Variando o coeficiente* b, *os pontos* $(b+1, f_b(b+1))$ *descrevem a reta de equação* $h(s) = -s-1$. *Veja uma descrição dessa situação na Figura 7.*

Figura 7. Reta $h(s) = -s-1$, **descrita pelos pontos** $(b+1, f_b(b+1))$ **dos gráficos de** $f_b(x) = -x^2+bx-1$, **quando variamos o coeficiente** b.



Fonte: Figura construída pelos autores, com o auxílio do software Geogebra.

A seguinte proposição faz uma análise da variação do coeficiente c. O caso do vértice da parábola é simples e foi observado por SOUSA em [2]. Nosso trabalho amplia o resultado para o caso mais geral dos pontos $(c+k, f_c(c+k))$.

Proposição 3.3. *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *a função quadrática definida por* $f(x) = ax^2+bx+c$, *com* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$. *Variando o coeficiente* c *em* $\mathbb{R}$, *os vértices* $V_c = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2-4ac)}{4a}\right)$ *das parábolas determinadas por* f_c, *descrevem uma reta vertical. Além disso, os pontos* $(c+k, f_c(c+k))$, *distintos do vértice, descrevem uma parábola.*

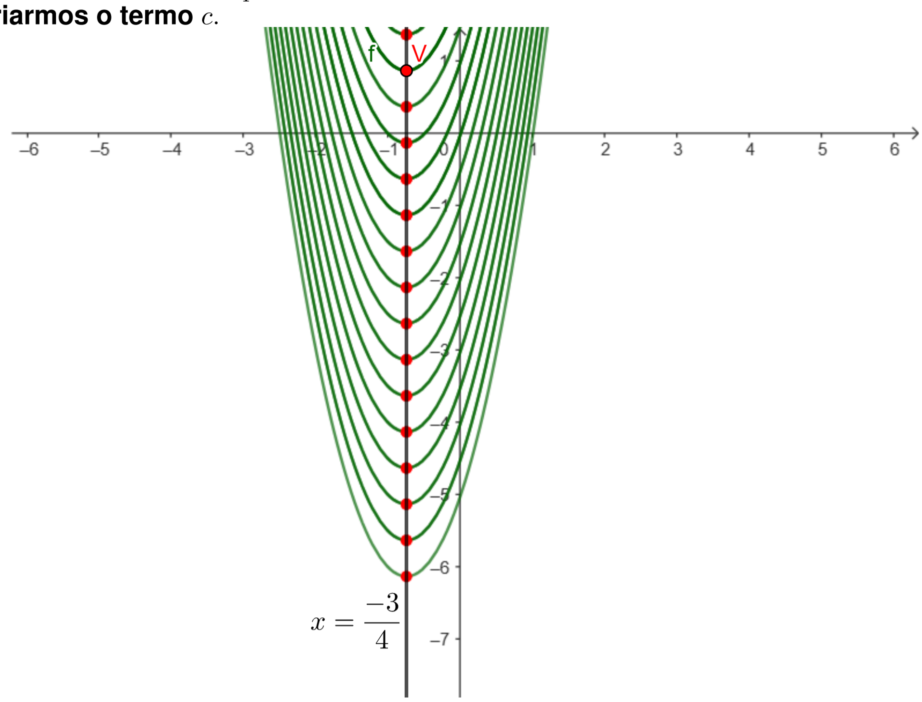
Demonstração. O caso do vértice é simples. Basta ver que quando se varia o coeficiente c, a abscissa dos vértices não é afetada. Então, variando c, os vértices V_c descrevem a reta $x = \frac{-b}{2a}$. No outro caso, vamos escrever o ponto $(c+k, f_c(c+k))$ na forma $(s, h(s))$, para alguma função h. Basta fazer $s = c+k$, ou seja, $c = s-k$. Deste modo,

$$\begin{aligned} h(s) &= f_c(c+k) \\ &= a(c+k)^2 + b(c+k) + c \\ &= as^2 + bs + (s-k) \\ &= as^2 + (b+1)s - k. \end{aligned}$$

Assim, $(c+k, f_c(c+k))$, descreve a parábola $h(s) = as^2+(b+1)s-k$. Isso encerra a prova da proposição. $\square$

Exemplo 3.6. *Seja a função definida por* $f(x) = 2x^2 + 3x + c$*. Variando o termo* c*, os vértices* V_c *descrevem a reta vertical* $x = \frac{-3}{4}$*. Como uma observação particular, neste caso, o vértice descreve o eixo de simetria de cada uma das parábolas obtidas com a variação do termo* c*. Veja a Figura 8.*

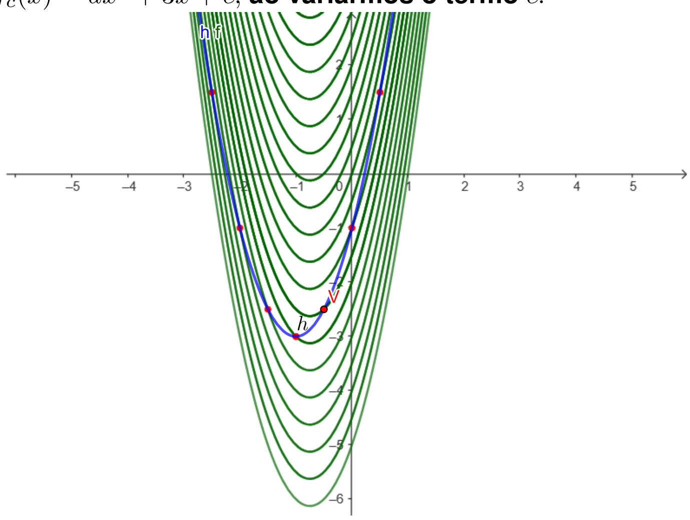
Figura 8. Reta $x = \frac{-3}{4}$**, descrita pelos vértices** V_c **de** $f_c(x) = 2x^2 + 3x + c$**, ao variarmos o termo** c.



Fonte: Figura construída pelos autores com o auxílio do software Geogebra.

Exemplo 3.7. *Seja a função definida por* $f(x) = 2x^2 + 3x + c$*. Variando o termo* c*, os pontos* $(c+1, f_c(c+1))$ *descrevem a parábola* $h(s) = 2s^2 + 4s - 1$*. Veja a Figura 9.*

Figura 9. Parabóla $h(s) = 2s^2 + 4s - 1$**, descrita pelos pontos** $(c+1, f_c(c+1))$ **dos gráficos de** $f_c(x) = ax^2 + 3x + c$**, ao variarmos o termo** c.



Fonte: Figura construída pelos Autores com o auxílio do software Geogebra.

4. Considerações finais

O estudo feito neste trabalho sobre o comportamento do vértice e de um ponto qualquer da parábola decorrente da variação dos coeficientes a, b e c, mostrou que a trajetória desses pontos pode resultar em diferentes trajetórias gráficas. No caso da variação do coeficiente a, observou-se que o vértice descreve uma reta, enquanto um ponto qualquer descreve uma cúbica. Já na variação do coeficiente b o vértice descreve uma parábola, enquanto que um outro ponto distinto do vértice, descreve uma reta ou uma parábola. Por fim, na variação do coeficiente c, o vértice descreve uma reta vertical, enquanto que um outro ponto qualquer descreve uma parábola. Alguns trabalhos tratam apenas do comportamento do vértice sob o efeito da variação dos coeficientes da função quadrática. Este trabalho amplia os resultados para um ponto qualquer distinto do vértice.

Esses resultados nos permitem compreender melhor como a variação dos coeficientes pode influenciar diretamente no comportamento dos pontos da parábola.

Como observação final, cabe ressaltar a importância de estudos como este na matemática, que nos permitem explorar as diversas possibilidades e padrões que podem surgir a partir de simples variações nos elementos de uma função. Espera-se que este artigo contribua para o enriquecimento do conhecimento matemático e inspire novas investigações sobre o tema.

Referências

[1] IEZZI, Gelson. *Fundamentos de matemática elementar, 7 : geometria analítica.* 6.ed. Atual, São Paulo, 2013.

[2] SOUSA, Fábio A. Leão. *Funções quadráticas: Estudo do gráfico das funções quadráticas* Dissertação do Mestrado Profissional em Rede Nacional-PROFMAT, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.

[3] LOPES,T. Beirigo, MORAES, R.S. *Estudo dos coeficientes da função quadrática por meio do software geogebra.* II Jornada de estudos em Matemática-JEM- Marabá,Pará, 2016.

[4] BOYER, Carl B. *História da matemática* ed Edgard Blücher, 1998.