



# Desenvolvimento de um Código Computacional para o Estudo Analítico e Numérico do Fenômeno da Elastoplasticidade Unidimensional

Evilly Raquel Henrique da Silveira<sup>1</sup>, Adenilda Timóteo Salviano<sup>1</sup>, Sebastião Simão da Silva<sup>1</sup>, Taciana Araújo de Souza<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Engenharia Civil  
Instituto Federal da Paraíba (IFPB) – Cajazeiras, PB – Brazil

evilly.raquel@academico.ifpb.edu.br,  
adenilda.salviano@academico.ifpb.edu.br, sebastião.silva@ifpb.edu.br,  
taciana.souza@ifpb.edu.br

**Abstract.** *In this work, one-dimensional elastoplasticity is studied using 1D bar elements. The analytical formulation of the elastoplastic model with isotropic hardening is presented, as well as the algorithm to solve the problem. A computational code is then written in the Scilab language. For the solution of the resulting nonlinear equations, the Newton-Raphson method with constant force control was used. Two classic examples present in the literature are studied analytically and numerically in detail. The convergence between the analytical and numerical results validate the study and the numerical code developed.*

**Resumo.** *Neste trabalho estuda-se o fenômeno da elastoplasticidade unidimensional por meio de elementos de barra 1D. Apresenta-se a formulação analítica do modelo elastoplástico com endurecimento isotrópico bem como o algoritmo para simulação do problema. Um código computacional é então escrito na linguagem Scilab. Para a solução das equações não lineares resultantes utilizou-se o método de Newton-Raphson com controle de força constante. Dois exemplos clássicos presentes na literatura são estudados analiticamente e numericamente em detalhes. A convergência entre os resultados analíticos e numéricos validam o estudo e o código numérico desenvolvido.*

## 1. Introdução

Durante muito tempo o estudo do comportamento das estruturas estava limitada à utilização de modelos linear-elásticos, nos quais os deslocamentos são assumidos infinitesimais e a lei de Hooke é considerada válida. Dessa forma, em determinadas situações, as soluções obtidas por estas teorias não são capazes de representar o comportamento real de estruturas mais complexas. De acordo com Lourenço (1999), uma falta de rigor na análise dos problemas, pode resultar em erros na quantificação de segurança de estruturas e, por vezes, em acidentes catastróficos. A maioria destes acidentes ocorrem devido a incoerência entre o comportamento real da estrutura e o modelo de cálculo admitido (SAMPAIO, 2004).



Muitas estruturas são caracterizadas pelo comportamento inelástico dos materiais das quais são constituídas. Segundo Munoz-Rojas e Filho (2001), a não-linearidade material surge quando as relações constitutivas dos materiais situam-se fora do escopo linear. Neste quesito, fenômenos tais como a plasticidade são identificados. Estes são responsáveis por mudanças nas propriedades de rigidez do sistema estrutural (MUÑOZ e ROEHL, 2017).

Modelos de plasticidade são frequentemente usados em programas de análise pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) para investigação do comportamento não linear material (ROLLAND, et al, 2021). Segundo Souza et al. (2019), na análise não linear de estruturas, programas computacionais atuam como grandes facilitadores no processo de modelagem, análise e avaliação de resultados.

O estudo da plasticidade unidimensional é útil como introdução e como um passo intermediário para tópicos mais complexos. Trata-se de um tema importante para abrir caminhos para o aprendizado na área de plasticidade bidimensional e tridimensional. Além disso, o caso unidimensional é uma boa introdução aos conceitos necessários para construir algoritmos (YAW, 2012).

Problemas de engenharia estrutural bem como engenharia geotécnica são modelados com a utilização de elementos unidimensionais (BRAUN, et al, 2018). O concreto armado é o exemplo mais comum, sendo as barras de aço modeladas como elementos de cabo e incorporadas a modelagem de elementos finitos referente ao concreto. Entre as inúmeras contribuições na área, referencia-se as pesquisas de Manzoli et al. (2008), Oliver et al. (2008) e Figueiredo et al. (2013). Aplicações geotécnicas também podem ser citadas. Mendoza et. al. (2015) realizou estudo para a verificação de um modelo unidimensional elastoplástico mediante análise de compressibilidade do solo estruturado da cidade de Brasília. Amouzou e Soulaïmani (2021) apresentam algoritmos numéricos para resolver problemas elastoplásticos com o MEF, validam as ferramentas aplicando em um problema de barra não linear e posteriormente analisam um sistema bidimensional de barragem de enrocamento carregada em deformação plana. Segundo os antes citados autores, o uso de códigos numéricos que levam em conta a plasticidade é essencial ao projetar estruturas geotécnicas, pois são ferramentas funcionais de tomada de decisão.

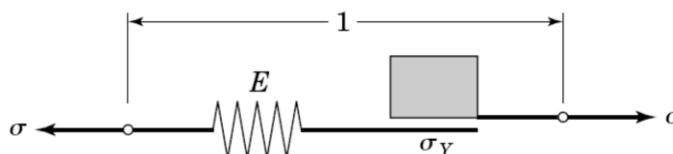
Neste contexto, este trabalho tem como objetivo descrever em detalhes o fenômeno de elastoplasticidade unidimensional, fazendo-se o estudo analítico e numérico de problemas clássicos em que se utiliza o elemento de barra 1D. O modelo constitutivo do material considerado nas análises é o elástico com endurecimento isotrópico. A solução não-linear dos problemas são obtidas por meio do método de Newton-Raphson com controle de força constante. Os algoritmos desenvolvidos para a análise dos problemas apresentados foram implementados utilizando a linguagem Scilab.

## 2. Plasticidade unidimensional

Para alguns materiais, o gráfico de tensão versus deformação é linear para tensões abaixo de um certo limite chamado de tensão de escoamento. Nesta situação após encerrada a aplicação de carga, o corpo não apresenta deformações residuais. Se o material for carregado além deste ponto o material cede e começa a se deformar

plasticamente, e após cessado o carregamento, a deformação torna-se irreversível ou permanente – Owen e Hinton (1980), Chen e Han (1988) e Lemaitre e Chaboche (1994).

A teoria da plasticidade, tratada de forma detalhada em Simo e Hughes (1998), fornece modelos que descrevem o comportamento da relação tensão-deformação, para materiais que quando submetidos a carregamentos externos apresentam uma resposta elastoplástica. Estes modelos, são compostos de dispositivos com respostas conhecidas e que representam o que ocorre fisicamente na realidade. Para fundamentar a estrutura matemática da plasticidade clássica examina-se a resposta mecânica do dispositivo friccional unidimensional ilustrado na Figura 1:



**Figura 1. Dispositivo friccional unidimensional ilustrando a plasticidade**

Assume-se que o dispositivo possui comprimento e área unitária e que ele consiste de uma mola com constante arbitrária  $E$  e elemento de fricção de Coulomb com constante  $\sigma_y > 0$ . Além disso, se fornece ao mesmo uma tensão  $\sigma$  e uma deformação  $\varepsilon$  total.

No modelo elastoplástico ideal a deformação total sofrida pelo o dispositivo é separada em duas parcelas: uma parte elástica, relacionada a mola com constante  $E$  e a outra parte plástica relacionada a interface de atrito  $\sigma_y$ . Dessa forma, tem-se a Equação (1):

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (1)$$

em que  $\varepsilon^e$  é a deformação elástica e  $\varepsilon^p$  é a deformação plástica. Por considerações de equilíbrio a tensão sobre a mola com constante  $E$  é  $\sigma$ . Logo, se estabelece a relação elástica (Equação (2)):

$$\sigma = E \varepsilon^e \quad (2)$$

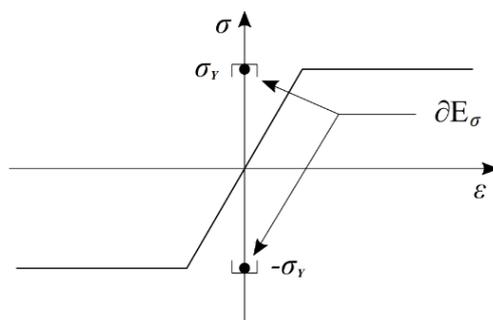
De acordo com a Equação (1), isolando a deformação elástica  $\varepsilon^e$  tem-se a Equação (3):

$$\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^p \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2), a tensão sobre a mola com constante  $E$  é igual a Equação (4):

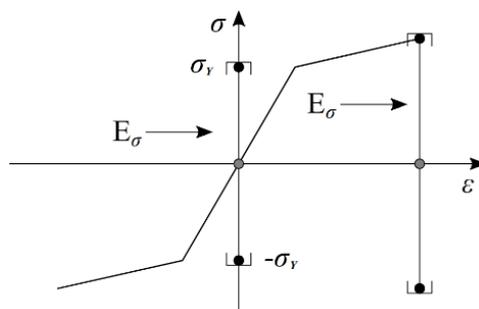
$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (4)$$

No presente modelo unidimensional a tensão no dispositivo friccional não pode ser maior em valor absoluto que  $\sigma_y > 0$ . Logo, a tensão admissível é forçada a situar-se no intervalo fechado  $[-\sigma_y, \sigma_y] \subset \mathbb{R}$  (sendo  $\sigma_y$  a tensão de escoamento no dispositivo friccional). Assim, a superfície de escoamento no presente modelo reduz-se a dois pontos  $\partial E_\sigma = \{-\sigma_y, \sigma_y\}$  e permanece constante ao longo do tempo (Figura 2).



**Figura 2. Representação esquemática da resposta mecânica de um modelo elástoplástico perfeito unidimensional.**

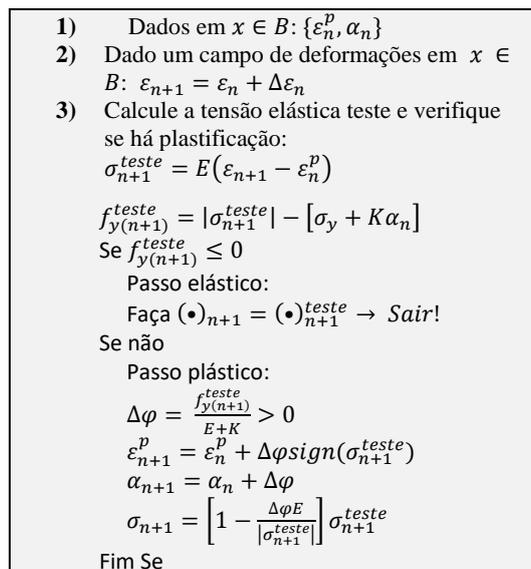
Por outro lado, o endurecimento é um efeito observado experimentalmente em alguns metais. Devido a este fenômeno ocorre uma expansão no espaço de tensões admissíveis  $\partial E_\sigma$  com o aumento do escoamento no sistema. Esta expansão representa o fenômeno de endurecimento do material. Na Figura 3 ilustra-se o modelo elástoplástico com endurecimento isotrópico.



**Figura 3. Comportamento elástoplástico com endurecimento**

Considere agora o algoritmo para um problema de plasticidade 1D. Suponha que um incremento de deformação é fornecido de modo que um novo valor de deformação total  $\varepsilon$  é obtido. A partir desta informação é necessário verificar se com o incremento de tensão e, conseqüentemente, de deformação, ocorreu a plastificação do material. Para tanto é necessário calcular inicialmente o estado teste, determinado apenas em termos das condições iniciais e do incremento de deformação fornecido  $\Delta\varepsilon_n$ . Uma vez calculado, os seguintes critérios são estabelecidos: se  $f_{y(n+1)}^{teste} \leq 0$  a deformação é elástica e a solução é trivial. por outro lado, se  $f_{y(n+1)}^{teste} > 0$ , então ocorreu uma etapa plástica. Nesta situação o problema é encontrar  $\sigma_{n+1}$ ,  $\alpha_{n+1}$ , tal que  $\Delta\varphi > 0$ . Ter esta informação permite o cálculo de  $\varepsilon_{n+1}^p$ , que é o valor atualizado da deformação plástica.

Na Figura 4, apresenta-se o fluxograma para o algoritmo incremental de mapeamento e retorno para plasticidade unidimensional com endurecimento, tal como descrito em Simo e Hughes (1998).



**Figura 4. Fluxograma do procedimento incremental da plasticidade unidimensional com endurecimento**

Sendo,

$\varepsilon_n^p$  a deformação plástica no incremento  $n$ ;

$\alpha_n$  a variável de endurecimento no incremento  $n$ ;

$\varepsilon_{n+1}$  a deformação total no incremento  $n + 1$ ;

$\varepsilon_n$  a deformação total no incremento  $n$ ;

$\Delta\varepsilon_n$  o incremento  $n$  de deformação;

$\sigma_{n+1}^{teste}$  a tensão teste no incremento  $n + 1$ ;

$E$  o módulo de elasticidade;

$f_{y(n+1)}^{teste}$  a condição de escoamento teste no incremento  $n + 1$ ;

$\Delta\varphi$  o multiplicador de Lagrange;

$K$  o módulo plástico;

$\varepsilon_{n+1}^p$  a deformação plástica atualizada no incremento  $n + 1$ ;

$\alpha_{n+1}$  a variável de endurecimento no incremento  $n + 1$ ;

$\sigma_{n+1}$  a tensão no incremento  $n + 1$ .

### 3. Estratégia de obtenção da resposta não linear

Em análises não linear material as estruturas geralmente atingem um nível de carga máximo, ficando incapazes de resistir a carregamentos mais elevados, a menos que uma mudança na constituição do material ocorra.

Na Figura 5, ilustra-se uma trajetória de equilíbrio tipicamente não linear em que as letras  $R$ ,  $L$  e  $F$  expressam, respectivamente: configuração de referência, ponto limite e falha.

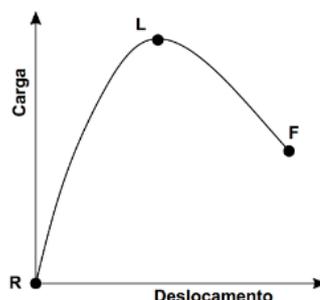


Figura 5. Trajetória de equilíbrio de análise não linear

O sistema de equações que governa o equilíbrio estático em um problema estrutural com comportamento não linear é descrito por Maximiano, et al, (2014), sendo expresso na Equação (5):

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (5)$$

em que  $\mathbf{g}$  é o vetor de forças desequilibradas (resíduo),  $\mathbf{F}_r$  é o vetor de referência que caracteriza a direção da força externa,  $\lambda$  é o parâmetro de força e  $\mathbf{F}_{int}$  é o vetor de forças internas. Geralmente, a solução do sistema dado pela Equação (5) é obtido por um esquema incremental e iterativo. Aplicando-se o método de Newton-Raphson (SOUZA et al., 2018) (Equação (6)):

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k-1)} = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}^{(k-1)}) \quad (6)$$

em que  $\mathbf{K}^{(k-1)} = \partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{u}$  é a matriz de rigidez da estrutura e  $\delta \mathbf{u}^{(k)}$  é o subincremento do vetor de deslocamento na iteração anterior e atual, respectivamente. O parâmetro total do vetor de deslocamento nodais são atualizados por meio de (CRISFIELD, 1991) (Equação (7)):

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^{(k)} \quad (7)$$

Na estratégia de iteração de carga constante, o parâmetro de carga  $\lambda$  é mantido constante para cada passo de carga do ciclo iterativo. A convergência para cada passo de carga é verificada por meio da norma do vetor de força desequilibradas e do vetor de força de referência (Equação (8)):

$$\|\mathbf{g}\| < tol \|\mathbf{F}_r\| \quad (8)$$

em que  $tol$  é a tolerância fornecida pelo usuário. Na Figura 6 apresenta-se o fluxograma da estratégia de solução através do método de Newton-Raphson padrão com controle de força constante.

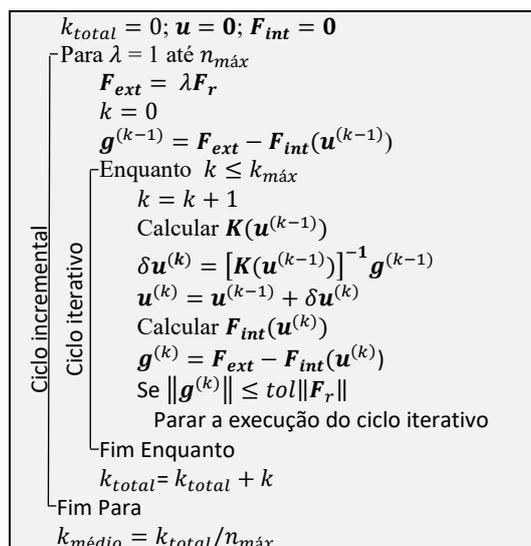


Figura 6. Fluxograma do procedimento incremental e iterativo

#### 4. Estudo analítico e numérico da elastoplasticidade 1D

Nesta seção apresenta-se as descrições completas das soluções analíticas, e os resultados numéricos obtidos por meio do programa computacional, para dois problemas clássicos da literatura.

O código computacional foi escrito na linguagem de programação Scilab. Na implementação levou-se em consideração os fluxogramas para o modelo constitutivo (de von Mises) e o solver (Newton-Raphson padrão com controle de força constante) mostrados nas Figuras 3 e 5, respectivamente.

##### 4.1. Exemplo 1: Barra sob processo de carga e descarga

Neste exemplo investiga-se o comportamento elastoplástico de uma barra biapoada com comprimento  $L$  e área  $A$  unitárias, submetida a um esforço de tração simples  $R$ , conforme ilustrada na Figura 7. Além disso, o material da barra possui módulo de elasticidade  $E = 207 \text{ GPa}$ . Considera-se que o material tem comportamento elastoplástico com endurecimento isotrópico. A seguir é apresentada a descrição completa da solução analítica, e estes resultados são, posteriormente, comparados com a aqueles resultantes da solução numérica. Este problema é estudado por Chen e Han (1988), dentre outros autores.

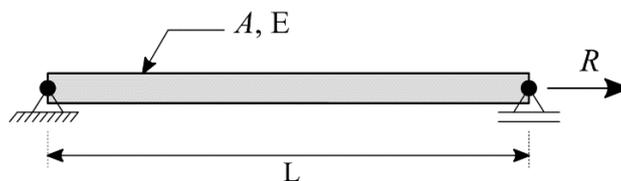


Figura 7. Barra tracionada

Tendo em vista a aproximação numérica da resposta  $\sigma$  versus  $\varepsilon$ , pode-se utilizar as Equações (9) e (10), para  $\sigma \geq \sigma_0$ :



$$\sigma = \sigma_0 + m\varepsilon^p \quad (9)$$

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E} \quad (10)$$

em que:  $\sigma$  é a tensão para um material plástico com endurecimento elástico-linear;  $\sigma_0 = 207 \text{ MPa}$  é a tensão de escoamento;  $m = 25,9 \text{ GPa}$  é igual ao módulo plástico;  $\varepsilon^p$  é a deformação plástica;  $\varepsilon^e$  é a deformação elástica e  $E = 207 \text{ GPa}$  é o módulo de elasticidade.

Inicialmente, alonga-se a barra até que a mesma apresente uma deformação  $\varepsilon = 0,007$ . Em seguida, através de uma tensão de compressão contínua, retorna-se a deformação inicial ( $\varepsilon = 0$ ). Posteriormente, recarrega-se a barra até que seja obtida novamente a deformação  $\varepsilon = 0,007$ .

De acordo com a definição de módulo plástico  $E_p$  tem-se que (Equação (11)):

$$E_p = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} = m = 25900 \text{ MPa} \quad (11)$$

O módulo tangente  $E_t$  é igual a (Equação (12)):

$$E_t = \frac{1}{\frac{1}{E} + \frac{1}{E_p}} \quad (12)$$

substituindo (9) e o valor do módulo de elasticidade ( $E = 207 \text{ GPa}$ ) na Equação (10), resulta em:

$$E_t = \frac{1}{\frac{1}{207000} + \frac{1}{25900}} = 23020 \text{ MPa}$$

Quando a barra é alongada o material que a constitui escoou no ponto em que a deformação é igual (Equação (13)):

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} = \frac{207 \times 10^6}{207 \times 10^9} = 0,001 \quad (13)$$

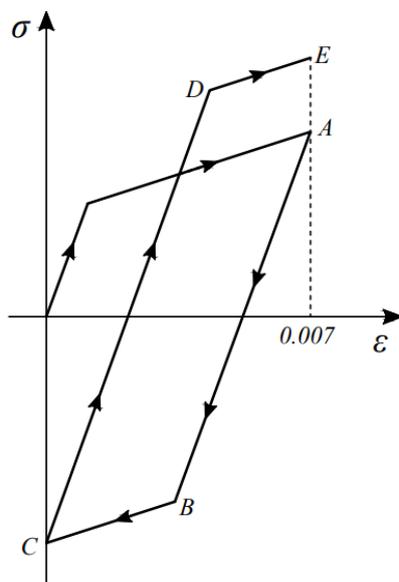
Prosseguindo com o alongamento, a deformação  $\varepsilon = 0,007$  é obtida no ponto A. Neste ponto a tensão vale (Equação (14)):

$$\sigma_A = \sigma_0 + \Delta\sigma = \sigma_0 + E_t \Delta\varepsilon \quad (14)$$

que, por sua vez, resulta em:

$$\sigma_A = 207 + 23020 \cdot (0,007 - 0,001) = 345 \text{ MPa}$$

Na Figura 8 pode-se observar o comportamento elastoplástico do material durante o processo de carregamento até o ponto A.



**Figura 8. Elastoplasticidade com endurecimento isotrópico**

Ainda visualizando a Figura 8, pode-se verificar que a partir de A a barra é descarregada e o material comporta-se elasticamente até que no ponto B, sob um estado de compressão, volta a escoar novamente. Assim, de acordo com a condição de endurecimento isotrópico, tem-se que:

$$\sigma_B = -\sigma_A = -345 \text{ MPa}$$

e a deformação no ponto B é dada por (Equação (15)):

$$\varepsilon_B = \varepsilon_A - 2 \frac{\sigma_A}{E} \quad (15)$$

que após substituições produz:

$$\varepsilon_B = 0,007 - 2 \frac{345}{207000} = 0,00367$$

No ponto C, em que  $\varepsilon = 0$ , tem-se (Equação (16)):

$$\sigma_C = \sigma_B + E_t \Delta \varepsilon \quad (16)$$

que após a substituição dos valores de  $\sigma_B$ ,  $\Delta \varepsilon$  e  $E_t$  resulta em:

$$\begin{aligned} \sigma_C &= -345 + 23020 \cdot (0 - 0,00367) \\ \sigma_C &= -429 \text{ MPa} \end{aligned}$$

A partir do ponto C ocorre uma reversão de esforços (descarregamento) e, conseqüentemente, o material comporta-se elasticamente até o ponto D. Assim:

$$\sigma_D = 429 \text{ MPa}$$

e a deformação neste ponto é dada por (Equação (17)):

$$\varepsilon_D = \varepsilon_C - 2 \frac{\sigma_D}{E} \quad (17)$$

que após substituições resulta em:

$$\varepsilon_D = 0 + 2 \frac{429}{207000} = 0,004145$$

Finalmente, quando a deformação alcança novamente  $\varepsilon = 0,007$  no ponto E, a tensão resultante é dada por (Equação (18)):

$$\sigma_E = \sigma_D + E_t \Delta \varepsilon \quad (18)$$

que, por sua vez, produz:

$$\sigma_E = 429 + 23020(0,007 - 0,004145)$$

$$\sigma_E = 495 \text{ MPa}$$

Na Figura 9 mostra-se os resultados obtidos por meio do código numérico desenvolvido na linguagem Scilab, e os resultados da solução analítica antes apresentada.

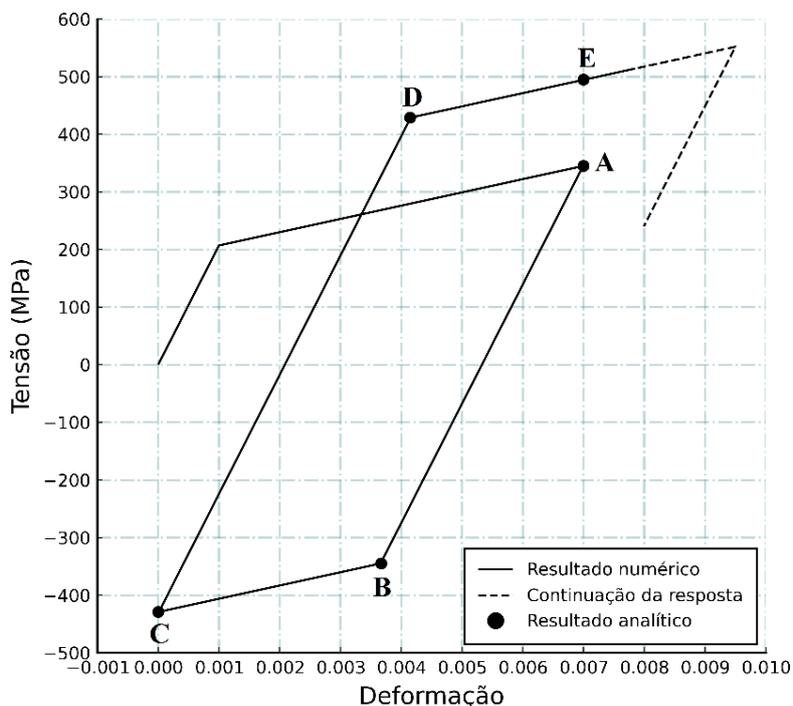


Figura 9. Curva tensão versus deformação

Pela curva  $\sigma$  versus  $\varepsilon$  exposta na Figura 8 pode-se perceber a convergência existente entre os resultados obtidos de maneira numérica e aqueles calculados analiticamente. Ademais, o código numérico desenvolvido neste trabalho captura uma resposta além da apresentada de maneira analítica. Até o ponto E os resultados calculados por meio do código implementado estão totalmente de acordo com encontrados em Chen e Han (1988), dentre outros autores. Por meio da ferramenta desenvolvida no presente trabalho pode-se continuar estudando o comportamento elastoplástico da estrutura, como ilustrado na linha tracejada após o ponto E.

## 4.2. Barra biengastada submetida a um carregamento axial

Neste exemplo analisa-se uma barra com área unitária  $A$  apoiada rigidamente em ambas as extremidades, submetida a uma carga axial  $R$ , conforme ilustrado na Figura 10. A relação tensão *versus* deformação e a curva carga *versus* tempo são fornecidas nas Figuras 11 e 12, respectivamente. Considera-se que os deslocamentos e deformações sejam pequenos e que a carga é aplicada lentamente. Então, calcula-se o deslocamento no ponto de aplicação da carga. Este problema foi estudado por Bathe (1996), entre outros autores.

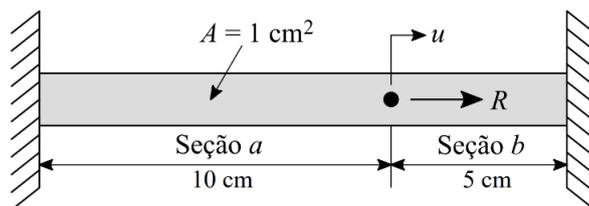


Figura 10. Barra biengastada

Na Figura 10,  $u$  é o deslocamento no ponto de aplicação da carga; o comprimento da seção  $a$  é  $L_a = 10 \text{ cm}$ ; e o comprimento da seção  $b$  é  $L_b = 5 \text{ cm}$ .

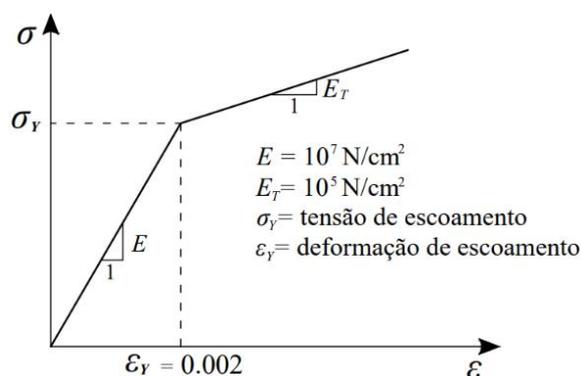


Figure 11. Relação tensão versus deformação

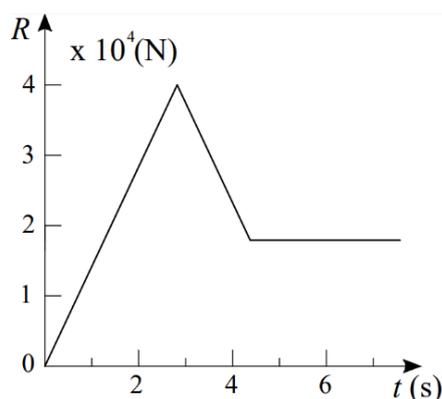


Figure 12. Variação de carga no tempo

Tendo em vista que a carga é aplicada lentamente e os deslocamentos e deformações são pequenos, calcula-se a resposta da barra mediante uma análise estática e considera-se apenas a não linearidade do material. Logo, para as seções  $a$  e  $b$ , as relações de deformação são dadas por (Equação (19)):



$${}^t\varepsilon_a = \frac{{}^tu}{L_a}; \quad {}^t\varepsilon_b = -\frac{{}^tu}{L_b} \quad (19)$$

e as relações de equilíbrio igual a (Equação (20)):

$${}^tR + {}^t\sigma_b A = {}^t\sigma_a A \quad (20)$$

sendo:  $\varepsilon_a$  a deformação na seção  $a$ ;  $\varepsilon_b$  a deformação na seção  $b$ ;  $L_a$  o comprimento da seção  $a$ ;  $L_b$  o comprimento da seção  $b$ ;  $u$  o deslocamento no ponto de aplicação da carga;  $R$  a carga axial;  $\sigma_a$  a tensão na seção  $a$ ; e  $\sigma_b$  a tensão na seção  $b$ .

Por outro lado, as relações constitutivas sob condições de carregamento são dadas por (Equações (21) a (23)):

- Região elástica

$${}^t\varepsilon = \frac{{}^t\sigma}{E} \quad (21)$$

em que:  $\varepsilon$  a deformação elástica;  $\sigma$  a tensão e  $E$  o módulo de elasticidade.

- Região plástica

$${}^t\varepsilon = \varepsilon_y + \frac{{}^t\sigma - \sigma_y}{E_T} \quad (22)$$

sendo:  $\varepsilon$  a deformação plástica;  $\sigma_y$  a tensão de escoamento;  $\varepsilon_y$  a deformação de escoamento, e  $E_T$  o módulo tangente.

- Descarregamento (Equação (23))

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{E} \quad (23)$$

onde:  $\Delta\varepsilon$  e  $\Delta\sigma$  são respectivamente, a deformação e a tensão no processo de descarregamento e  $E$  o módulo de elasticidade.

Observa-se que, nessas relações, o sobrescrito ( ${}^t\blacksquare$ ) denota "no tempo  $t$ ".

### (i) Seções $a$ e $b$ elásticas:

Durante a fase inicial de aplicação de carga, ambas as seções  $a$  e  $b$  são elásticas. Usando as Equações de (19) à (21),

$${}^tR = EA{}^tu \left( \frac{1}{L_a} + \frac{1}{L_b} \right) \quad (24)$$

e substituindo os valores apresentados nas Figuras de 10 a 12, obtém-se (Equação (25)):

$${}^tu = \frac{{}^tR}{3 \times 10^6} \quad (25)$$

com (Equação (26))

$${}^t\sigma_a = \frac{{}^tR}{3A}; \quad {}^t\sigma_b = -\frac{2}{3} \frac{{}^tR}{A} \quad (26)$$



**(ii) Seção *a* elástica e seção *b* plástica:**

A seção *b* se tornará plástica no tempo ( $t^*$ ) quando, usando as Equações (25) e (26), têm-se que,

$${}^t R = \frac{3}{2} \sigma_y A \quad (27)$$

Neste ponto, a tensão de escoamento  $\sigma_y$  é obtida utilizando algumas relações trigonométricas na curva mostrada na Figura 11, resultando em  $\sigma_y = 20.000$ , e assim:

$$R = \frac{3}{2} \cdot 20000 \cdot 1 = 3 \times 10^4 \text{ N}$$

Substituindo este resultado na Equação (25), tem-se:

$$u = \frac{3 \times 10^4}{3 \times 10^6} = 0,01 \text{ cm}$$

Em seguida, considerando as tensões nas seções, tem-se (Equação (28) e (29)):

$${}^t \sigma_a = E \frac{{}^t u}{L_a} \quad (28)$$

e

$${}^t \sigma_b = -E_T \left( \frac{{}^t u}{L_b} - \epsilon_y \right) - \sigma_y \quad (29)$$

Usando as Equações (28) e (29), tem-se, portanto, para ( $t \geq t^*$ ), (Equação (30)):

$${}^t R = \frac{EA {}^t u}{L_a} + \frac{E_T A {}^t u}{L_b} - E_T \epsilon_y A + \sigma_y A \quad (30)$$

e assim, desenvolvendo-se (Equação (31))

$${}^t u = \frac{{}^t R/A + E_T \epsilon_y - \sigma_y}{(E/L_a) + (E_T/L_b)} \quad (31)$$

Realizando as devidas substituições na Equação (31), obtém-se:

$${}^t u = \frac{{}^t R}{1.02 \times 10^6} - 1.9412 \times 10^{-2} \quad (32)$$

Para  $R = 4 \times 10^4 \text{ N}$ , o deslocamento, de acordo com a Equação (32), é igual a:

$$\begin{aligned} {}^t u &= \frac{4 \times 10^4}{1.02 \times 10^6} - 1.9412 \times 10^{-2} \\ {}^t u &= 0,01980 \text{ cm} \end{aligned}$$

**(iii) Considerando o descarregamento, ambas as seções atuam elasticamente**

Assim, tem-se (Equação (33)):

$$\Delta u = \frac{\Delta R}{EA[(1/L_a) + (1/L_b)]} \quad (33)$$

Fazendo as devidas substituições, produz-se:

$$\Delta u = \frac{(4 \times 10^4 - 1,5 \times 10^4)}{10^7 \times 1 \times [(1/10) + (1/5)]}$$

$$\Delta u = 8,33 \times 10^{-3}$$

E portanto,

$$u = 0,01980 - 8,33 \times 10^{-3} = 0,01147 \text{ cm}$$

Na Figura 13 apresenta-se os resultados de carga e deslocamentos calculados anteriormente de forma analítica e os resultados obtidos por meio do código implementado neste trabalho. Os resultados estão de acordo com aqueles apresentados em Bathe (1996), dentre outros autores. Por meio do programa computacional desenvolvido pode-se ainda prosseguir com a obtenção da resposta, conforme pode-se observar na curva tracejada.

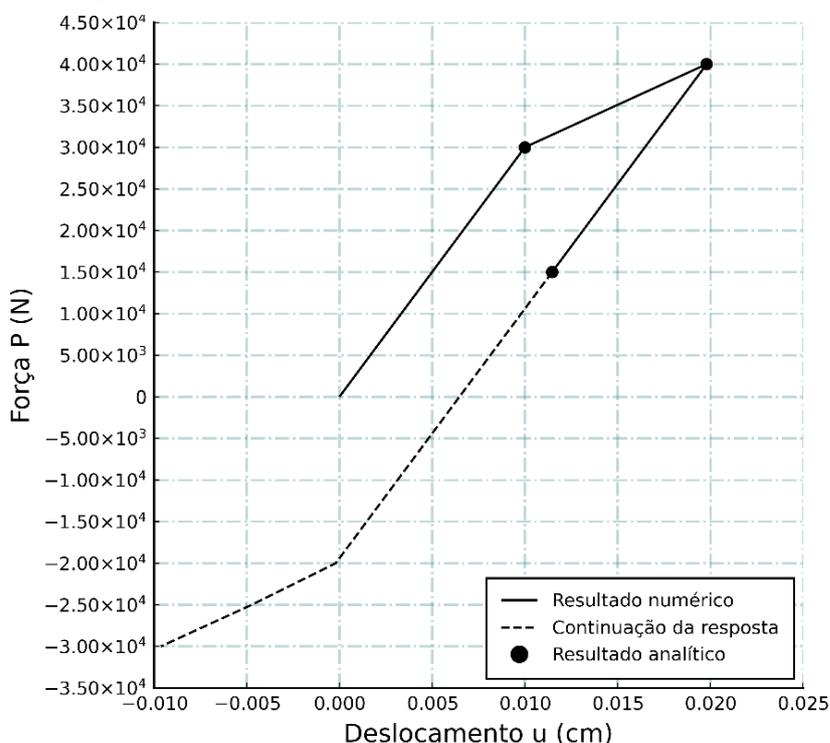


Figure 13. Curva força versus deslocamento

Analogamente ao exemplo anterior, pode-se perceber, de acordo com a Figura 13, a semelhança entre os resultados numéricos e analíticos.

## 5. Conclusões

Neste trabalho, foi implementado um código numérico desenvolvido com a linguagem Scilab, para o estudo e análise elastoplástica de barras 1D. A formulação do modelo elastoplástico com endurecimento isotrópico foi descrita. Para a obtenção das respostas não-lineares dos sistemas, fez-se uso do método de Newton-Raphson com controle de força constante.



A plasticidade unidimensional, é a formulação mais simples utilizada para descrição da relação constitutiva de um material elastoplástico. Seu estudo permite o entendimento do fenômeno da plasticidade, e de aspectos conceituais importantes para compreensão da modelagem de problemas mais complexos (bidimensional e tridimensional). Por outro lado, o estudo analítico e numérico detalhado de problemas simples, tais como os apresentados neste trabalho, contribui sobretudo no estudo e entendimento inicial de diversos fenômenos relacionados a elastoplasticidade, facilitando a apreensão futura de conceitos muitos mais complicados, como efeito Bauschinger, e os fenômenos ratchetting e shakedown, por exemplo.

Nas aplicações estudadas foram apresentadas as soluções analíticas, a fim de comparar os resultados obtidos, com aqueles calculados por meio do código computacional. De uma forma geral, os resultados são idênticos aqueles encontrados nas referências clássicas mencionadas. Esse fato atesta a qualidade da implementação. A continuação da resposta pode ainda ser obtida por meio do programa desenvolvido no presente trabalho. Outros modelos de elastoplasticidade podem ser facilmente acoplados ao código implementado, como o modelo de endurecimento cinemático, o modelo misto e modelos de dano.

## 6. Referências

Lourenço, P. B. (1999). **Métodos computacionais na mecânica dos sólidos não-linear**. Relatório 99-DEC/E-1, Departamento de Engenharia Civil, Universidade do Minho, Guimarães.

Sampaio, T. S. (2004). **Análise numérica, via MEF, de ligações em treliças metálicas espaciais**. Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Muñoz, P. A. R., Filho, L. A. D. (2001). **CE-60: ATENAS - Análise não linear geométrica e material de treliças espaciais**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Muñoz, P. A. R., Roehl, D. (2017). **A continuation method with combined restrictions for nonlinear structure analysis**. Finite Elements in Analysis and Design, v. 130, p. 53-64.

Rolland, D., Christian, F., Bienvenu, K., Abraham, K., Gerard, M. (2021). **A Simple Elasto-Plastic Iterative Method by Fem for the Analysis of Plane Articulated Truss: Case of a 3-Bar Truss**. Journal of Materials Science and Chemical Engineering, v. 9, n. 6, p. 12-23.

Yaw, L. L. (2012). **Nonlinear Static - 1D Plasticity - Various Forms of Isotropic Hardening**. Walla Walla University.

Souza, L. A. F., Santos, D. F., Kawamoto, R. Y. M. (2019). **Análise não linear física de treliças com ciclos de carregamento e descarregamento**. Revista Tecnológica, Universidade Estadual de Maringá, v. 28, n. 1, p. 101-118.

Braun, A. L., Bruch, A., Maghous, S. (2018). **A mixed 3D-1D finite element formulation for analysis of geomaterial structures with embedded curvilinear**



**inclusions:** application to load transfer in mooring anchor systems. Latin American Journal of Solids and Structures, v. 15.

Manzoli, O. L., Oliver, J., Diaz, G., Huespe A. (2008). **Three-dimensional analysis of reinforced concrete members via embedded discontinuity finite elements.** Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, v.1, p. 58-83.

Oliver, J., Linero, D. L., Huespe, A. E., Manzoli, O. L. (2008). **Two-dimensional modeling of material failure in reinforced concrete by means of a continuum strong discontinuity approach.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 197, n. 5, p. 332-348.

Figueiredo, M. P., Maghous, S., Campos Filho, A. (2013). **Three-dimensional finite element analysis of reinforced concrete structural elements regarded as elastoplastic multiphase media.** Materials and structures, v. 46, n. 3, p. 383-404.

Mendoza, C., Farias, M. M., Zuluaga, R. (2015). **Um modelo elastoplástico unidimensional para representar a compressibilidade do solo estruturado de Brasília (Brasil).** From Fundamentals to Applications in geotechnics, IOS Press, p. 1025-1032.

Amouzou, G. Y., Soulaïmani, A. (2021). **Numerical algorithms for elastoplasticity: Finite elements code development and implementation of the mohr–coulomb law.** Applied Sciences, v. 11, n. 10, p. 463.

Owen, D. R. J., Hinton, E. (1980). **Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice.** Pineridge, Swansea, UK.

Chen, W. F., Han, D. J. (1988). **Plasticity for structural engineers.** Sprinler-Verlag, New York, USA.

Lemaitre, J., Chaboche, J-L. (1994). **Mechanics of Solids Materials.** Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Simo, J. C., Hughes, T. J. R. (1998). **Computacional Inelasticity.** Sprinler-Verlag, New York, USA.

Maximiano, D. P., Silva, A. R. D., Silveira, R. A. M. (2014). **Iterative strategies associated with the normal flow technique on the nonlinear analysis of structural arches.** Rem: Revista Escola de Minas, v. 67, n. 2, p. 143-150, Ouro Preto.

Souza, L. A. F., Castelani, E. V., Shirabayashi, W. V. I., Aliano Filho, A., Machado, R. D. (2018). **Trusses Nonlinear Problems Solution with Numerical Methods of Cubic Convergence Order.** TEMA (São Carlos), v. 19, n. 1, p. 161-179.

Crisfield, M. A. (1991). **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures.** Volume 1: Essentials, John Wiley & Sons Ltd., London, UK.

Bathe, K. J. (1996). **Finite element procedures.** Prentice Hall, New Jersey, USA.