



Uma generalização do Teorema de Etiene

Elzimar de O. Rufino ¹,

¹ Departamento de Matemática – UFRR

elzimar.rufino@ufrr.br

Abstract. *In this work we present a generalization of Etiene's Theorem, which is related to the construction of the graph of a quadratic function $f(x) = ax^2 + bx + c$. Etiene's Theorem determines in a simple way the obtaining of the abscissa x_e of the point of the parabola whose ordinate is c . Our purpose is to extend this result to any point of the parabola. In addition, we propose a sequence of steps for the construction of the graph of a quadratic function which is particularly interesting for the case where the quadratic function has no real zeros.*

Resumo. *Neste trabalho apresentamos uma generalização do Teorema de Etiene, o qual está relacionado à construção do gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. O Teorema de Etiene determina de modo simples a obtenção da abscissa x_e do ponto da parábola cuja ordenada é c . Nosso propósito é estender este resultado a um ponto qualquer da parábola. Além disso, propomos uma sequência de passos para a construção do gráfico de uma função quadrática o qual é, em particular, interessante para o caso em que a função quadrática não possui zeros reais.*

1. Introdução

Segundo DORIGO, a curva plana chamada “parábola” teria surgido dos esforços de Menaecmo (séc. IV a.C.), um discípulo de Aristóteles (384-322 a.C.), para resolver o chamado *problema deliano*, cuja origem é muito curiosa.

Conforme ressalta LUCERO [6], Eratóstenes [4] comenta que certa vez, na antiga Grécia, os habitantes da ilha de Delos perguntaram ao oráculo de Apolo o que fazer para combater uma peste que assolava o povo. A resposta do oráculo foi que o altar de Apolo, de forma cúbica, devia ser duplicado. Assim, teria nascido o problema geométrico da duplicação do cubo, também conhecido como “problema deliano”, que se tornou um dos problemas clássicos da antiguidade. A solução tentada pelos delianos, que consistiu em dobrar as arestas, obviamente não é correta, pois octuplica o volume. Consta até que a intensidade da peste cresceu após essa tentativa. DORIGO comenta que Menaecmo tentou novos caminhos, o que o levou à descoberta de uma família de curvas conhecidas como seções cônicas, das quais a parábola é um dos membros. Aliás, sua solução deriva da interseção de duas parábolas.

O famoso Galileu Galilei (Pisa, 15 de fevereiro de 1564 - Florença, 8 de janeiro de 1642), foi um astrônomo, físico e engenheiro florentino. Ao estudar a trajetória de objetos em lançamento Galileu realizou o seguinte experimento: fazer cair, em queda livre, bolas postas a rolar sobre uma superfície plana. Medindo as distâncias horizontais e verticais em posições diversas, deduziu a seguinte lei (aqui dada na simbologia moderna),



relacionando a distância horizontal, x , e a distância vertical, y , percorrida por uma bola que cai: $y = kx^2$, em que k é uma constante. Segue então que a trajetória descrita por um corpo em queda livre ou um tiro de canhão disparado horizontalmente é uma semiparábola (DORIGO, 2006).

Ainda segundo DORIER, Galileu chegou a esses resultados em 1608, mas não os publicou imediatamente. Devido a isso, o crédito pela descoberta de que a trajetória de um projétil, no vácuo, é uma parábola costuma ser atribuído a seu discípulo Bonaventura Cavalieri (1598? - 1647), que publicou um trabalho sobre trajetórias em 1632, baseando-se na suposição de que um projétil é impulsionado por duas forças distintas: a propulsora e a gravidade.

Como podemos ver nas citações acima, o estudo das parábolas e suas propriedades foi tema de grande relevância durante muito tempo. Uma aplicação das parábolas nos dias atuais se dá no uso de antenas. Mais especificamente, o uso das chamadas antenas parabólicas. As antenas parabólicas possuem boas propriedades de recepção e emissão de ondas eletromagnéticas que são enviadas por satélites em órbita ao redor da terra. Essa captação de sinal ocorre devido à propriedade da parábola de refletir o conjunto de raios recebidos para um único ponto F , chamado o foco da parábola.

No ensino básico, a parábola aparece nos livros do Ensino Médio como gráficos de funções da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b, c são números reais e $a \neq 0$. Por exemplo o livro intitulado *Matemática completa* [9], apresenta o estudo da função polinomial do segundo grau. A construção do gráfico é o primeiro tópico a ser abordado após a definição de função polinomial do segundo grau. No referido livro, os autores começam a mostrar a construção do gráfico sem colocar uma definição para parábola. Para auxiliar na compreensão seguem mencionando a concavidade da parábola, os zeros da função, o vértice e enfim o termo c , onde o ponto $(0, c)$ é a interseção da parábola com o eixo dos y .

Nosso trabalho está diretamente associado ao termo c , mencionado no parágrafo anterior. Mais especificamente, nos referimos a um resultado obtido por uma aluna chamada Etiene de um curso técnico de química do Instituto Federal Fluminense, que criou um teorema(2018) durante uma atividade proposta pelo seu professor de matemática. Ao procurar o simétrico do ponto $(0, c)$ em relação ao eixo de simetria da parábola ela percebeu uma propriedade ainda não mencionada na literatura que surpreendeu a todos pela sua simplicidade e que culminou, conforme pode ser visto em MUNIZ [5], em um artigo publicado na Revista do professor de Matemática RPM 99. Nosso propósito é estender o resultado para um ponto qualquer da parábola.

2. Preliminares

Vamos apresentar agora alguns pré-requisitos matemáticos necessários para uma boa compreensão de nossa exposição.

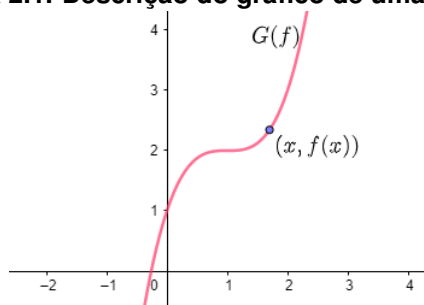
Vamos começar recordando a definição de gráfico de uma função do segundo grau.

Definição 2.1. *Dados conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$, o gráfico de uma função $f : A \rightarrow B$ é por definição o conjunto*

$$G(f) = \{(x, f(x)); x \in A\}.$$

Como o conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$ é identificado com o plano cartesiano, o gráfico de uma função também é identificado de modo natural a um subconjunto do plano cartesiano. Assim, podemos pensar o gráfico de uma função como um conjunto de pontos no plano cartesiano. Veja uma descrição do gráfico de uma função na Figura 2.1.

Figura 2.1. Descrição do gráfico de uma função



Fonte: Autor

Segundo DANTE [10], temos a seguinte definição para uma função quadrática ou função do segundo grau.

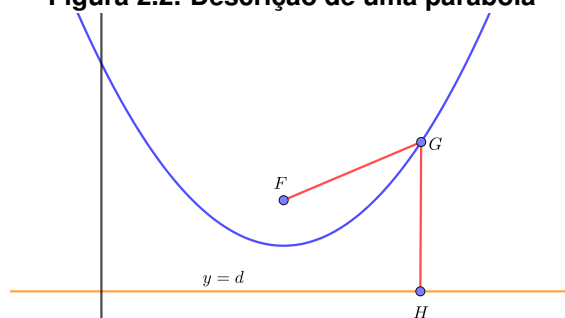
Definição 2.2. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b, c com $a \neq 0$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Como é fato bem conhecido na literatura, o gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Necessitamos então da seguinte definição de parábola, como pode ser vista em IEZZI [3].

Definição 2.3. Sejam um ponto F e uma reta d , pertencentes a um plano α , com $F \notin d$, Parábola é o conjunto dos pontos de α que estão à mesma distância de F e d . O ponto F é chamado de foco da parábola e a reta d é chamada de reta diretriz.

Na Figura 2.2 temos uma representação de uma parábola com reta diretriz $y = d$ e foco F . A parábola destacada é constituída dos pontos G tais que $d(F, G) = d(G, d)$. A

Figura 2.2. Descrição de uma parábola



Fonte: Autor

prova de que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola pode ser encontrada em IEZZI [3].



3. Uma generalização do Teorema de Etienne

Nesta seção vamos apresentar uma generalização do Teorema de Etienne. Uma aluna do Instituto Federal Fluminense (UFF), Camille Etienne, descobriu, no ano de 2018, uma propriedade interessante a respeito do gráfico de uma parábola. Essa propriedade ficou conhecida como “O Teorema de Etienne”.

Conforme comenta MUNIZ(2019) em [5], em uma de suas aulas algo diferente aconteceu. Depois de explicar o assunto aos alunos, ele passou sua lista de exercícios com a promessa de sua correção na aula seguinte.

Durante a correção dos exercícios que tratam da construção (esboço) do gráfico de uma função quadrática, o passo 5 é feito observando a distância do ponto P ao eixo de simetria, que deve ser igual à distância do ponto $(0, c)$ ao mesmo eixo. Durante a discussão do passo 5, parei e fiquei observando os alunos discutirem sobre como obter e plotar no plano cartesiano o ponto P . Nesse momento, a aluna Camille Etienne afirma: “É só somar as raízes!”. O aluno X verifica e complementa: “Deu certo! Vou ver se dá certo no exercício anterior!”. Depois de um tempo, assustado, X afirma: “Gente, sempre dá certo?”. A aluna Y e o aluno Z ficam procurando exemplos de gráficos de função quadrática, a fim de constatarem alguma incoerência, mas falham (MUNIZ, 2019).

A seguir enunciamos o Teorema como enunciado e provado por MUNIZ, [5].

Teorema 3.1 (Etienne). *Considere a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Então o ponto $P = (x_e, c)$ simétrico, com relação ao eixo de simetria da parábola, ao ponto $(0, c)$ é tal que o número x_e é igual à soma das raízes da função $y = f(x)$ ou equivalentemente, $x_e = -\frac{b}{a}$.*

Muniz [5] verifica o resultado como segue: basta resolver a equação $f(x) = c$, ou seja,

$$\begin{aligned}f(x) &= c \\ax^2 + bx + c &= c \\ax^2 + bx &= 0 \\x(ax + b) &= 0\end{aligned}$$

Logo, $x = 0$ ou $ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a} = x_e$. Como $-\frac{b}{a}$ é a soma das raízes, o resultado está provado e mostramos que $x_e = -\frac{b}{a}$ mesmo se a função não possuir raízes reais.

Observação: MUNIZ, em [5] chama o número $x_e = -\frac{b}{a}$ de número de Etienne.

É claro que o resultado do Teorema de Etienne é bastante simples. No entanto, fica evidenciado o fato de que a aluna se sentiu alegre e motivada com a sua descoberta e que sua motivação também contagiou os colegas e também seu professor, conforme menciona MUNIZ [5].

No seguinte exemplo vamos destacar a facilidade proporcionada pelo Teorema de Etienne.

Exemplo 3.1. *Determinar o ponto Q simétrico ao ponto $P = (0, 6)$, em relação ao eixo de simetria $x = x_v = -\frac{b}{2a}$ da parábola que é o gráfico da função quadrática $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$*



definida por $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Solução usual: Devemos determinar o valor de $x \neq 0$ tal que $f(x) = 6$, isto é, $x^2 - 5x + 6 = 6$. Então, $x^2 - 5x + 6 = 6 \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x - 5) = 0$. Como $x \neq 0$, devemos ter $x = 5$. Portanto, $Q = (5, 6)$.

Solução via Teorema de Etienne: a abscissa de Q é $x = -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{1} = 5$. Logo, $Q = (5, 6)$.

Agora enunciaremos uma generalização do Teorema 3.1 de Etienne.

Proposição 3.1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Então, o ponto $P = (x_s, f(x_s))$ simétrico ao ponto $(x_o, f(x_o))$, com relação ao eixo de simetria da parábola, é tal que $x_s = x_e - x_o$, onde x_e é o número de Etienne, isto é, $x_s = -\frac{b}{a} - x_o$. Em particular, se $x_o = 0$, temos o Teorema de Etienne.

Demonstração. Para provar o resultado basta determinar o número x_s de modo que $f(x_s) = f(x_o)$. Mas,

$$\begin{aligned} f(x_s) &= f(x_o) \\ \Leftrightarrow ax_s^2 + bx_s + c &= ax_o^2 + bx_o + c \\ \Leftrightarrow ax_s^2 + bx_s &= ax_o^2 + bx_o \\ \Leftrightarrow ax_s^2 - ax_o^2 + bx_s - bx_o &= 0 \\ \Leftrightarrow a(x_s^2 - x_o^2) + b(x_s - x_o) &= 0 \\ \Leftrightarrow a(x_s - x_o)(x_s + x_o) + b(x_s - x_o) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x_s - x_o)(a(x_s + x_o) + b) &= 0. \end{aligned}$$

Como $x_s \neq x_o$, devemos ter $a(x_s + x_o) + b = 0$, ou seja, $x_s + x_o = -\frac{b}{a}$. Segue que $x_s = -\frac{b}{a} - x_o$. Sendo $x_e = -\frac{b}{a}$, concluímos que $x_s = x_e - x_o$, como queríamos mostrar. \square

No exemplo seguinte comparamos o modo usual com o modo fornecido pelo Teorema 3.1 para obter o simétrico de um ponto de uma parábola em relação ao eixo de simetria $x = x_o$.

Exemplo 3.2. Considere a parábola determinada pela função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuja lei é dada por $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Vamos determinar o simétrico do ponto $P = (-1, 12)$ da parábola determinada por f em relação ao eixo de simetria da parábola.

Solução usual: Vamos determinar o valor de $x \neq -1$ tal que $f(x) = 12$, isto é, vamos resolver a equação $x^2 - 5x + 6 = 12$. Equivalentemente, devemos resolver a equação $x^2 - 5x - 6 = 0$. Vamos utilizar a fórmula de resolução

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ com } \Delta = b^2 - 4ac. \quad (1)$$

Temos que $\Delta = (-5)^2 - 4.1.(-6) = 49$. Segue da equação (1) que

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2.1} = \frac{5 \pm 7}{2}.$$

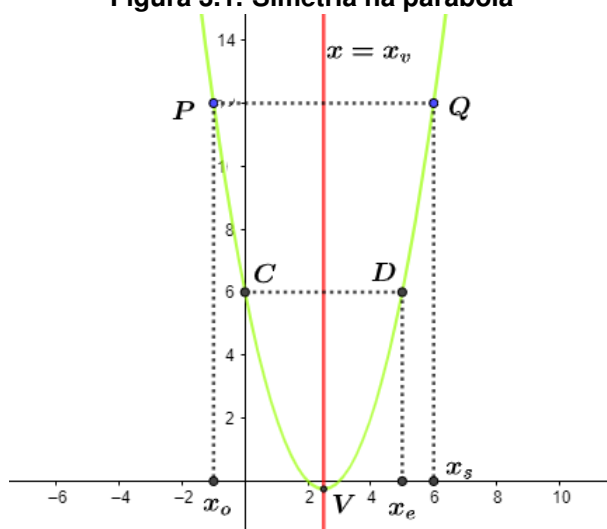
Obtemos $x' = -1$ e $x'' = 6$. Logo, o ponto procurado é $(6, 12)$.

Solução via Proposição 3.1: Pela Proposição 3.1

$$x = x_e - x_o = \frac{-b}{a} - x_o = \frac{-(-5)}{1} - (-1) = 6.$$

Logo, o ponto procurado é $(6, 12)$. Como podemos perceber, usando o Teorema 3.1 a resolução se torna muito mais simples. A Figura 3.1 mostra a parábola determinada por f , o ponto $P = (-1, 12)$, o ponto $Q = (6, 12)$ simétrico de P em relação ao eixo de simetria da parábola, o ponto $C = (0, 6)$, o ponto D simétrico de C em relação ao eixo de simetria da parábola, o número de etiene $x_e = 5$ e o número $x_s = 6$.

Figura 3.1. Simetria na parábola



Fonte: Autor

Vamos fazer agora uma observação pertinente sobre o vértice $V = (\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ da parábola.

Observação 3.1. O vértice pode ser reescrito do seguinte modo:

$$V = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{-b}{a}, \frac{-b}{a} \cdot \frac{b}{4} + c\right) = \left(\frac{x_e}{2}, \frac{bx_e}{4} + c\right) = \left(\frac{x_e}{2}, \frac{bx_e + 4c}{4}\right). \quad (2)$$

Desta forma o vértice ganha uma expressão envolvendo o número de Etiene.

Na verdade, a representação dada na Observação 3.1 nada mais é do que uma releitura do fato de que $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Essa igualdade também nos fornece o número de Etiene em função do vértice, isto é, $x_e = 2x_v$. Assim, a Proposição 3.1 pode ser reescrita do seguinte modo:

Proposição 3.2. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Então, o ponto $P = (x_s, f(x_s))$ simétrico ao ponto $(x_o, f(x_o))$, com relação ao eixo de simetria da parábola, é tal que $x_s = 2x_v - x_o$. Em particular, se $x_o = 0$, então $x_s = 2x_v$.

O interessante na formulação da Proposição 3.2 é que não é necessário olhar para as raízes a fim de obter o simétrico do ponto $(0, c)$ em relação ao eixo de simetria da parábola. Vale ressaltar ainda que, embora suficiente, conhecer as raízes não é

uma condição necessária para a obtenção do vértice da parábola, conforme indicado por VIEGAS em [13]. Além disso, não se trata de raízes complexas no primeiro ano do Ensino Médio.

4. Algumas considerações sobre a construção do gráfico de uma função quadrática

Nosso objetivo nesta seção é tecer alguns comentários sobre a sequência adotada por alguns livros didáticos para a construção do gráfico de uma função quadrática.

MUNIZ, em [5] comenta que segue um esquema de cinco passos ao ministrar suas aulas com o intuito de construir um esboço do gráfico de uma função quadrática. Os passos são os seguintes:

- 1) Observar a concavidade da função quadrática ($a > 0$ ou $a < 0$);
- 2) Verificar a existência de raízes reais ($ax^2 + bx + c = 0$). Caso existam as denotaremos por x_1 e x_2 .
- 3) Calcular as coordenadas do vértice da parábola $V = (\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ e esboçar o eixo de simetria;
- 4) Obter a intersecção da parábola com o eixo das ordenadas ($f(0) = c$);
- 5) Plotar o ponto P que é o simétrico ao ponto $(0, c)$ em relação ao eixo de simetria da parábola.

A sequência de passos proposta por MUNIZ em [5] é usualmente compartilhada pelos livros didáticos de matemática do primeiro ano do Ensino Médio. Por exemplo, SANTOS, GENTIL e GREGO, em [12] destacam alguns pontos importantes para a construção do gráfico:

1. Análise do coeficiente a : nesse momento os autores mencionam que o gráfico da função quadrática é uma parábola com concavidade que depende do valor do coeficiente a .
2. Cálculo dos zeros ou raízes da função: é apresentada a fórmula de resolução da equação do segundo grau $f(x) = 0$ e mencionada a intersecção do gráfico com o eixo x e sua relação com o discriminante Δ .
3. Cálculo das coordenadas do vértice da parábola: O vértice é apresentado com suas coordenadas em função do valor do discriminante Δ e dos valores dos coeficientes b e a .
4. Determinação da intersecção da parábola com o eixo y .

Observação 4.1. *Muitos dos livros didáticos de matemática do primeiro ano do Ensino Médio afirmam que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola, sem o entanto, definir o que é uma parábola, como é o caso de GIOVANNI e BONJORNO em [9]. Desse modo, a menos que o professor extrapole as ideias do livro, os alunos terão uma ideia de parábola baseada no esboços de gráficos e não no conceito de parábola.*

Com o intuito de destacar a importância do eixo de simetria da parábola sugerimos os seguintes passos para a obtenção de um esboço inicial do gráfico de uma função quadrática:

- P1) Determinar as coordenadas do vértice da parábola e marcá-lo no plano cartesiano.
- P2) Marcar o ponto $(0, c)$ e seu simétrico $(2x_v, c)$ em relação ao eixo de simetria.

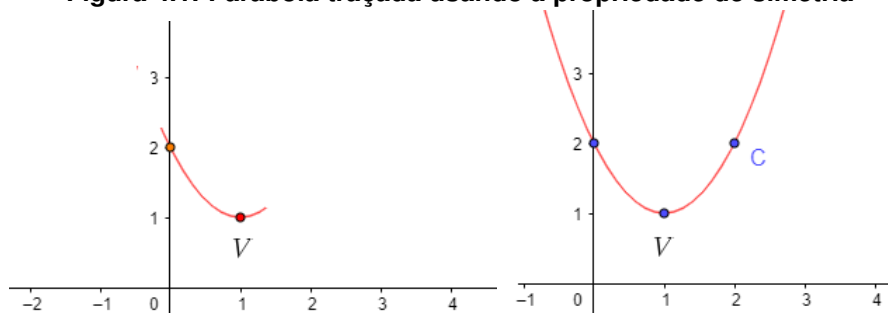
P3) Escolher $x = 0$ e valores de x todos menores ou maiores do que x_v . Com esses valores obter os pontos $(x, f(x))$ e marcá-los no plano cartesiano. Em seguida marcar os pontos $(2x_v - x, f(x))$ simétricos à $(x, f(x))$ em relação ao eixo de simetria da parábola.

Observação 4.2. *Veja que, na sequência de passos P1), P2), P3), não foram utilizadas as raízes. Esse procedimento é interessante para o caso em que a função quadrática não possui raízes reais.*

Exemplo 4.1. *Traçar o gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2x + 2$.*

Antes de completarmos um esboço do gráfico vale a pena ressaltar que, juntamente com os alunos, pode-se obter outras informações dispondo apenas do vértice e do ponto $(0, c)$. Por exemplo, ao observarmos o gráfico à esquerda na Figura 4.1 podemos concluir que a função quadrática não possui raízes reais e a parábola possui concavidade voltada para cima. Tendo marcado o ponto $A = (0, 2)$ e o vértice $V = (1, 1)$

Figura 4.1. Parábola traçada usando a propriedade de simetria



Fonte: Autor

obtemos o simétrico de A em relação ao eixo de simetria da parábola, isto é o ponto $C = (2x_v, 1) = (2, 1)$. Um esboço é dado pelo gráfico à direita na Figura 4.1

Por fim, destacamos que, juntamente com os alunos, em um processo de investigação matemática, propriedades interessantes podem ser obtidas a respeito do assunto estudado.

5. Considerações finais

Em nosso trabalho apresentamos uma generalização do Teorema de Etienne. Além disso, propomos uma nova abordagem para o ensino da construção do gráfico de uma parábola.

Para finalizar ressaltamos que pode-se traçar o gráfico de uma função quadrática antes mesmo de se calcular as raízes. É uma alternativa aos professores, embora estejamos de acordo que marcar as raízes, em um segundo momento, é de fato necessário para um melhor entendimento. A vantagem de não calcular as raízes em um primeiro momento, é ter a possibilidade de estimular os alunos a fazerem estimativas das raízes, baseadas nas abscissas dos outros pontos do gráfico e no eixo de simetria. Ressaltamos ainda que, de posse somente do vértice da parábola e do ponto $(0, c)$ pode-se determinar, por inspeção geométrica, se a função quadrática possui raízes reais. Possuindo raízes reais, se possui uma ou duas raízes.



Nosso objetivo aqui foi proporcionar ao leitor um momento de reflexão sobre o ensino da construção do gráfico de uma função quadrática e esperamos que as ideias aqui expostas possam contribuir, de algum modo, ao ensino do tema em questão.

Referências

- [1] **BOYER C.** *História da Matemática* Edgard Blücher, S.Paulo. Pag. 424-427. 1974.
- [2] **DORIGO, M.** *Função quadrática: um estudo sobre as representações gráficas.* 2006. *Monografia de Especialização. PUC, São Paulo, 2006.*
- [3] **IEZZI, G.** *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria analítica.* Ed. Atual, São Paulo, 1979.
- [4] **IEZZI, G.; MURAKAMI, C.** *Fundamentos de Matemática Elementar: Conjuntos e funções* Ed. Atual, São Paulo, 2005.
- [5] **MUNIZ, L.O.** *O Teorema de Etiene* Revista do Professor de Matemática, RPM 99, ano 37, p.32-33, 2019.
- [6] **LUCERO, Jorce C.** *O Problema deliano* Revista do Professor de Matemática - RPPM 62.
- [7] **HEATH, Thomas** *History of Greek Mathematics* Mineola, NY, (EUA): Courier Dover Publications, 1981.
- [8] **PINTO, Anibal** *Os indivisíveis e o infinito no trabalho de Bonaventura Cavalieri.*[Recurso eletrônico] Disponível em: https://www.13snhct.sbhc.org.br/resources/anais/10/1342479633_ARQUIVO_TextoSBHC_publicacaoFinal.pdf
- [9] **GIOVANNI, J. Ruy, BONJORNO, J. Roberto.** *Matemática completa* 2ed.renov. São Paulo, FTD 2005.
- [10] **DANTE, L.R.** *Matemática* volume único, 1ed, Ática, São Paulo, 2005.
- [11] **OLIVEIRA, J. SILVA, S. M** *The complex numbers of the matricial view point / Os números complexos do ponto de vista matricial* BRazilian Journal of Development, Brazila, 2021.
- [12] **SANTOS,A.M.; GENTIL,N; GRECO, S.E.** *Matemática* Série Novo Ensino Médio, vol. único, ed. Ática, São Paulo, 2000.
- [13] **VIEGAS, G.** *Demonstração da fórmula do vértice (Função quadrática - 8 de 9)* Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=CuuHqAf-moI&t=265s> Acesso em: 17 de Junho de 2022.