



O problema de Heron na Geometria do Táxi

Marcos André S.¹, Elzimar de O. Rufino², Stephen Roosevelt B. S.³

¹ Universidade Federal de Roraima - UFRR

² Departamento de Matemática – UFRR

³ Secretaria de Estado da Educação e Desporto - SEED-RR

Abstract. *In this work we consider another point of view of the classical problem of flat Euclidean geometry known as the Heron problem which, in physical terms, is translated by the law of light reflection. We present a reformulation and a solution of said problem in geometry known as taxi geometry.*

Resumo. *Neste trabalho consideramos um outro ponto de vista do problema clássico da geometria euclidiana plana conhecido como o problema de Heron que, em termos físicos, se traduz pela lei da reflexão da luz. Apresentamos uma reformulação e uma solução do referido problema na geometria conhecida como geometria do táxi.*

1. Introdução

Um dos problemas de Otimização na Geometria mais conhecido é o de Heron de Alexandria, que viveu entre 150 a.C. e 250 d.C.

Segundo FONSECA [1], a Lei da reflexão da luz já era conhecida por Euclides e Aristóteles. No entanto, foi Heron quem mostrou, por um argumento geométrico simples, numa obra chamada *Catóptrica* (ou reflexão), que os ângulos de incidência e reflexão são iguais. Heron tomou como inspiração o princípio aristotélico, o qual afirma que a natureza nada faz do modo mais difícil, ou seja, se a luz deve ir de uma fonte A a um espelho l, então, ao olho B de um observador, ela deve seguir o caminho mais curto.

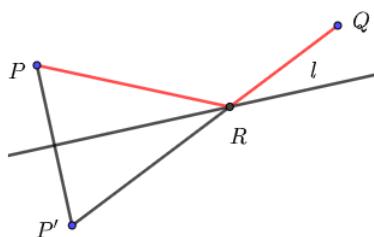
A situação física da lei da reflexão se traduz matematicamente através do problema de Heron, que diz:

Problema de Heron: *Seja l uma reta e P e Q pontos localizados em um mesmo semiplano determinado por l. Determine um ponto R sobre l de tal forma que a soma $\overline{PR} + \overline{RQ}$ seja a menor possível.*

A solução de Heron consiste no seguinte: marque o ponto P' simétrico do ponto P em relação à reta l. Em seguida trace o segmento $P'Q$. O segmento $P'Q$ intersecta a reta l em um ponto R. Nas condições do problema, a soma $\overline{PR} + \overline{RQ}$ é a menor possível. Para ver detalhes da prova sugerimos ao leitor consultar SANTOS em [2]. Veja na Figura 2 a solução geométrica desse problema.

No que se refere à geometria do táxi, segundo Gusmão, Sakaguti e Pires (2017) [3], ela teve início na topologia com os estudos do russo Hermann Minkowski (1864-1909), o qual foi um dos professores de Einstein. Em tal geometria, a métrica usual da geometria euclidiana é substituída por uma nova métrica em que a distância entre dois pontos é a soma das diferenças absolutas de suas coordenadas. A métrica do táxi é

Figura 1. Solução do problema de Heron clássico



Fonte: Autores

também conhecida como distância de Manhattan. O último nome faz alusão ao formato quadriculado da maior parte das ruas na ilha de Manhattan. Tal configuração faz com que a menor distância a ser percorrida por um carro que vai de um ponto a outro na cidade tenha como valor aquele número fornecido pela métrica conforme descrevemos.

Como já mencionamos, nossa proposta é considerar o problema de Heron sob o ponto de vista da geometria do táxi.

2. Preliminares

Nesta seção vamos expor alguns pré-requisitos matemáticos necessários ao entendimento de nosso trabalho.

2.1. Métrica e espaço métrico

Vamos começar essa seção com a definição de métrica em um conjunto não-vazio, essencial em nosso trabalho.

Definição 2.1. Uma métrica definida em um conjunto M não-vazio é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$ chamado a distância de x a y , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

- d1) $d(x, x) = 0$;
- d2) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;
- d3) $d(x, y) = d(y, x)$
- d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Um *espaço métrico* é um par (M, d) onde d é uma métrica definida no conjunto não-vazio M .

Exemplo 2.1 (Métrica euclidiana em \mathbb{R}). A reta \mathbb{R} , ou o conjunto dos números reais com a métrica $d(x, y) = |x - y|$ é um importante exemplo de espaço métrico.

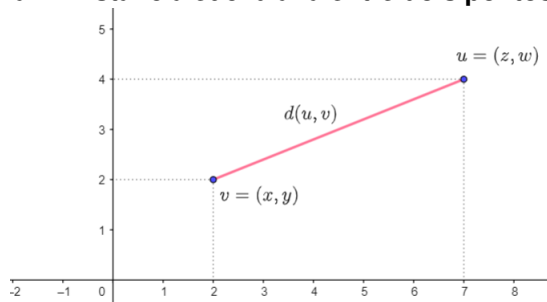
Exemplo 2.2 (Métrica euclidiana em \mathbb{R}^2). Neste exemplo apresentaremos a métrica euclidiana no conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}^2\}.$$

Dados $P = (x, y), Q = (z, w) \in \mathbb{R}^2$ define-se a métrica euclidiana por

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - z)^2 + (y - w)^2}. \quad (1)$$

A Figura 2 fornece uma visualização geométrica da distância entre u e v . Neste caso, $d(u, v)$ é o comprimento (euclidiano) do segmento que liga os pontos u e v .

Figura 2. Distância euclidiana entre dois pontos no \mathbb{R}^2 **Fonte:** Autores

Em particular, $d((0, 0), (2, 3)) = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

Observação: A prova de que a função definida em (1) é uma métrica pode ser vista em [4].

2.2. A métrica do táxi

A métrica que descreveremos nesta seção é a métrica que utilizaremos para uma releitura do problema de Heron.

Nosso ambiente de estudo é o conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\},$$

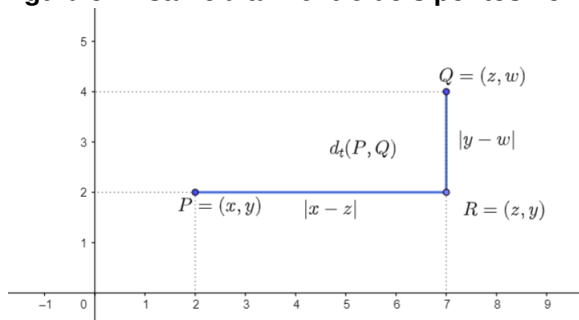
embora a definição se estenda para os conjuntos \mathbb{R}^n das n -uplas de coordenadas reais.

Dados $P = (x, y), Q = (z, w) \in \mathbb{R}^2$ define-se a métrica do táxi $d_t : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ por

$$d_t(P, Q) = |x - z| + |y - w|. \quad (2)$$

A Figura 3 mostra uma descrição geométrica dessa situação. A distância $d_t(P, Q)$ é a soma dos comprimentos dos segmentos PR e RQ destacados. Note ainda que

$$d_t(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q).$$

Figura 3. Distância táxi entre dois pontos no \mathbb{R}^2 **Fonte:** Autores

Exemplo 2.3. Dados $P = (2, 3), Q = (1, 2)$, temos que

$$d_t(P, Q) = |2 - 1| + |3 - 2| = 1 + 1 = 2.$$

Neste caso a distância euclidiana é dada por

$$d(P, Q) = \sqrt{(2 - 1)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{2}.$$

Necessitaremos das seguintes definições para os argumentos da solução do problema de Heron na geometria do táxi.

Definição 2.2. Uma sequência de segmentos contíguos é uma sequência de segmentos conectados na qual cada segmento começa no ponto (ou vértice) onde o anterior terminou.

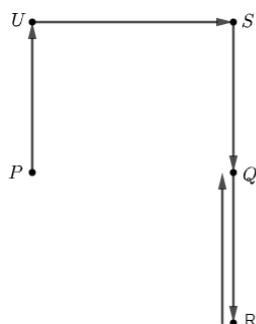
Definição 2.3. Chamaremos de passeio com início no ponto P e término no ponto Q , na geometria do táxi a uma sequência finita de pontos (ou vértices) J_s , conectados por segmentos contíguos horizontais ou verticais, de modo que a sequência começa em P e termina em Q . Uma tal sequência pode ser representada simplesmente por $PJ_2J_3 \dots J_s \dots J_{k-1}Q$.

Na observação seguinte chamaremos os segmentos horizontais (verticais) de segmentos do mesmo tipo. Os segmentos horizontais possuem os sentidos da esquerda para a direita e da direita para a esquerda. Já os verticais possuem os sentidos de cima para baixo e de baixo para cima.

Observação 2.1. É importante ressaltar que os pontos não são necessariamente distintos. Isso permite que segmentos possam ser repetidos durante o passeio, ou seja, é permitido ir e voltar qualquer quantidade de vezes em um mesmo segmento ou seguir um sentido oposto (fazer um recuo) do primeiro segmento do mesmo tipo.

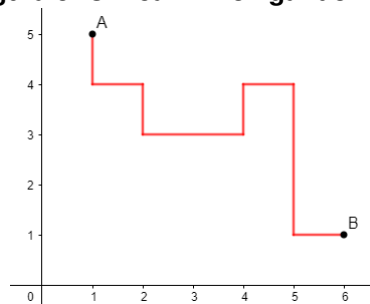
Exemplo 2.4. Na Figura 4 temos o passeio $PUSQRQ$ de P a Q . A parte final do passeio sai de Q vai até R e volta pelo mesmo segmento até Q .

Figura 4. Indicações de um passeios de P a Q .



Fonte: Autores

Definição 2.4. Um caminho na geometria do táxi é um passeio sem segmentos repetidos. Em outras palavras, um caminho é uma poligonal que possui somente segmentos horizontais ou verticais distintos.

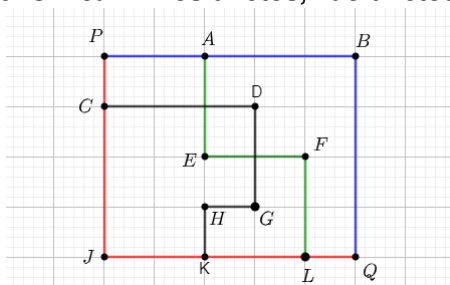
Figura 5. Um caminho ligando A a B**Fonte:** Autores

Ressaltamos que todo caminho é um passeio. No entanto, nem todo passeio é um caminho. Por exemplo, o passeio $PUSQRQ$ da Figura 4 não é um caminho. Já o passeio da Figura 5 mostra um caminho ligando os pontos A e B .

Definição 2.5. Um “caminho direto” na geometria do táxi é um caminho que não possui segmentos do mesmo tipo com sentidos opostos. Em outras palavras, um caminho sem recuos.

Definição 2.6. Chamaremos de caminho ideal a um caminho conectando dois pontos com a quantidade mínima de segmentos.

Exemplo 2.5. Na Figura 6 o caminho $PCDGHKQ$ não é um caminho direto. O caminho $PAEFLQ$ é um caminho direto, mas não é um caminho ideal. Por outro lado, os caminhos PJQ e PBQ são caminhos ideais. Os caminhos diretos determinam a distância entre dois pontos.

Figura 6. Um caminhos diretos, não diretos e ideais**Fonte:** Autores

Feitas as considerações necessárias, passaremos a tratar, a seguir, do problema de Heron na Geometria do táxi.

3. O problema de Heron na geometria do táxi

Nesta seção iremos expor uma solução para o *Problema de Heron* na geometria do Táxi. O enunciado do problema é análogo ao enunciado da geometria euclidiana.



Problema de Heron: *Sejam l uma reta e dois pontos P e Q situados em um mesmo semiplano determinado por l . Achar um caminho mais curto, na geometria do táxi, ligando P a Q e intersectando a reta l .*

Antes de começarmos com o problema de Heron na geometria do táxi, vamos fazer uma observação a respeito do problema de Heron euclidiano: no caso em que os pontos P e Q estão na mesma reta perpendicular à reta l , há um caminho euclidiano com recuo, isto é, o caminho euclidiano sai de um ponto P , passa pelo ponto Q , vai até a reta l e volta pelo mesmo segmento, finalizando no ponto Q . Neste caso, podemos dizer que há um recuo na parte em que os segmentos estão sobrepostos. Na geometria do táxi, segundo a definição que adotamos, não existe um caminho com essa propriedade.

Nas situações seguintes vamos denotar por $f_{min}(P, Q)$ a distância táxi correspondente à solução do problema de Heron. Vamos começar colocando uma situação particular.

3.1. Situação 1: A reta l é horizontal(ou vertical)

Nesta subseção trataremos do problema de Heron, na geometria do táxi, considerando a situação particular em que a reta l é horizontal(ou vertical).

Observação 3.1. *No que segue, quando mencionarmos um caminho, estaremos nos referindo a um caminho na geometria do táxi, conforme a Definição 2.4.*

Observação 3.2. *Nas situações do problema de Heron na geometria do táxi estaremos considerando somente os caminhos situados no mesmo semiplano fechado contendo os pontos P e Q . Além disso, em um primeiro momento, vamos considerar que os pontos P e Q não estão em uma mesma reta horizontal e nem em uma mesma reta vertical.*

A situação em que os pontos P e Q estão em uma mesma reta horizontal ou em uma mesma reta vertical será tratada separadamente em uma subseção.

A seguinte proposição dá uma resposta ao problema de Heron, na geometria do táxi, na situação em que a reta l é horizontal e no caso em que os pontos P e Q estão no semiplano superior¹ determinado pela reta l . O caso em que P e Q estão no semiplano inferior é totalmente análogo.

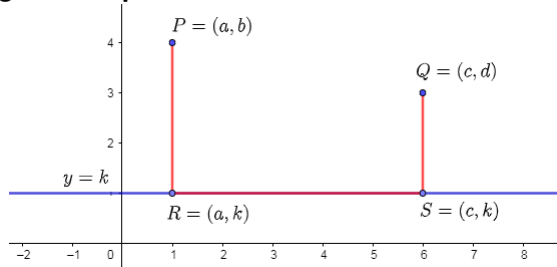
Proposição 3.1. *Sejam P e Q pontos situados em um mesmo semiplano determinado por uma reta horizontal l . Se R e S são, respectivamente, as projeções ortogonais de P e Q sobre a reta l , então um caminho mais curto de P a Q intersectando l é dado pela poligonal $PRSQ$.*

Demonstração. Sejam l a reta de equação $y = k$ para algum $k \in \mathbb{R}$. Sem perda de generalidade, vamos supor que os pontos $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$, estão no semiplano superior.

Na situação descrita acima, vamos verificar que um caminho ideal é dado pela poligonal $PRSQ$, conforme a Figura 7. Neste caso, distintamente da solução do problema de Heron clássico, o caminho intersecta a reta l em um segmento RS . A distância táxi percorrida é

$$f_{min}(P, Q) = |b - k| + |c - a| + |d - k|.$$

Figura 7. O problema de Heron com reta horizontal



Fonte: Autores

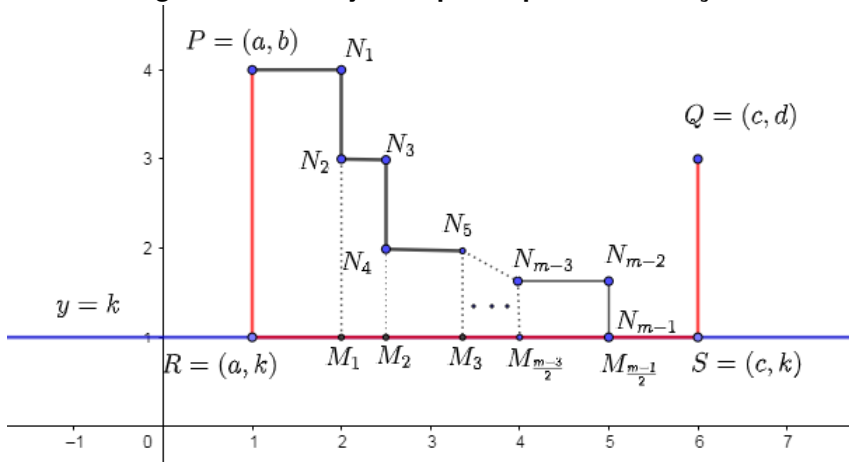
De fato: Inicialmente, note que a distância táxi percorrida via poligonal $PRSQ$, é

$$|b - k| + |c - a| + |d - k|.$$

Vamos mostrar que qualquer outra escolha de caminho que possua apenas o recuo SQ , na geometria do táxi, fornece o mesmo valor.

Para simplificar o raciocínio vamos supor que o ponto P seja o ponto de saída e o ponto Q seja o ponto de chegada. Para sair de P existem duas possibilidades: o deslocamento inicial é horizontal ou é vertical. Sem perda de generalidade vamos considerar que o deslocamento inicial seja horizontal. Vamos considerar que serão feitas m mudanças de direção nos pontos $N_1, N_2, \dots, N_m = S$. A Figura 8 mostra uma configuração em que m é ímpar.

Figura 8. Uma trajetória para a primeira situação



Fonte: Autores

Note que a distância euclidiana d_h percorrida horizontalmente é dada por

$$d_h = \overline{PN_1} + \overline{N_2N_3} + \overline{N_4N_5} + \dots + \overline{N_{m-3}N_{m-2}} + \overline{N_{m-1}S}. \quad (3)$$

¹Um semiplano Π determinado por uma reta l é chamado semiplano superior se, a reta vertical que passa por um ponto $P \in \Pi$ intersecta a reta l em um ponto R de modo que $y(P) > y(R)$. De modo análogo se define um semiplano inferior.

Projetando ortogonalmente os pontos $N_1, N_3, N_5, \dots, N_{m-4}, N_{m-2}$ sobre o eixo X , obtemos os pontos $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{\frac{m-3}{2}}, M_{\frac{m-1}{2}} = N_{m-1}$. Assim,

$$\overline{RM_1} + \overline{M_1M_2} + \overline{M_2M_3} + \dots + \overline{M_{\frac{m-3}{2}}M_{\frac{m-1}{2}}} + \overline{M_{\frac{m-1}{2}}S} = \overline{RS} = c - a. \quad (4)$$

Como

$$\begin{aligned} \overline{PN_1} &= \overline{RM_1}, \quad \overline{N_2N_3} = \overline{M_1M_2}, \quad \overline{N_4N_5} = \overline{M_2M_3}, \dots \\ \dots, \overline{N_{m-3}N_{m-2}} &= \overline{M_{\frac{m-3}{2}}M_{\frac{m-1}{2}}} \quad \text{e} \quad \overline{N_{m-1}N_m} = \overline{M_{\frac{m-1}{2}}S} \end{aligned}$$

segue das equações 3 e 4 que a distância euclidiana percorrida horizontalmente é dada por

$$d_h = |c - a|.$$

De modo análogo, o deslocamento euclidiano vertical d_v é dado por

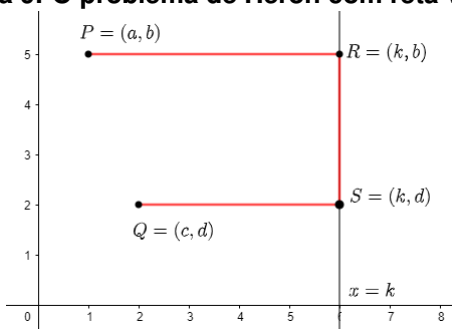
$$d_v = |b - k| + |d - k|.$$

Logo, a distância táxi percorrida na poligonal $PN_1N_2\dots N_{m-1}SQ$ é dada por

$$d_h + d_v = |b - k| + |c - a| + |d - k|.$$

Essa é a mesma distância percorrida na poligonal $PRSQ$. Além disso, essa distância táxi mínima percorrida é atingida utilizando qualquer caminho como o descrito na Figura 8. No caso em que a reta l é vertical, sua equação é dada por $x = k$, para $k \in \mathbb{R}$. O raciocínio é totalmente análogo ao caso da reta horizontal. A Figura 9 descreve essa situação. \square

Figura 9. O problema de Heron com reta vertical



Fonte: Autores

Observação 3.3. Na Figura 8 ambos os caminhos $PRSQ$ e $PN_1N_2\dots SQ$ são caminhos mais curtos. No entanto, embora $PN_1N_2\dots SQ$ seja um caminho direto, ele não é um caminho ideal. Por outro lado, o caminho $PRSQ$ é um caminho ideal, pois é constituído de apenas três segmentos, que é a quantidade mínima de segmentos para essa situação.

Corolário 3.1. *Nas condições da Proposição 3.1 temos que*

$$f_{\min}(P, Q) = |b - k| + |c - a| + |d - k|. \quad (5)$$

no caso em que a reta l é horizontal e

$$f_{\min}(P, Q) = |a - k| + |b - d| + |c - k|. \quad (6)$$

se a reta l é vertical.

Observação 3.4. *Como podemos ver na Figura 7, diferentemente da solução do problema de Heron clássico, na geometria do táxi a reta l pode ser intersectada em mais de um ponto. Na situação 1, no caso de l ser horizontal, consideramos a ordenada de P maior do que a ordenada de Q , como na Figura 7. Se ocorresse o contrário, bastaria renomear os pontos. Note que, se for escolhido o percurso da poligonal $PRSQ$, a reta l é intersectada em todo o segmento RS . Se fosse permitido passar pelo ponto Q antes de intersectar a reta l , então pode-se intersectar a reta l somente uma vez. Para tal, bastaria inicialmente ir na direção horizontal até o ponto A que tenha mesma abscissa do ponto Q e em seguida tomar a direção vertical, passar por Q , seguir até a reta l e depois voltar na mesma direção até o ponto Q . No entanto, $PASQ$ é um passeio que não é um caminho na geometria do táxi, embora a distância euclidiana nesse passeio seja a mesma obtida via poligonal $PRSQ$.*

Observação 3.5. *Existem infinitos passeios onde a reta l pode ser intersectada somente uma vez, cujas distâncias percorridas são iguais à distância táxi mínima. No entanto, esses passeios não são caminhos. Por fim, observamos que, na Situação 1, todos os caminhos com apenas o recuo SQ fornecem a mesma distância. Em particular, o caminho $PRSQ$ é um caminho ideal para a situação em questão.*

3.2. Situação 2: a reta l é transversal

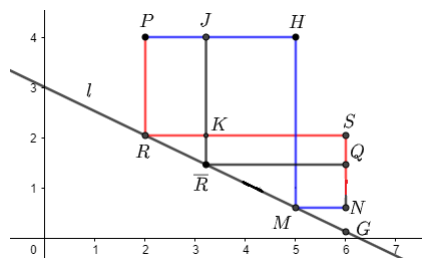
Nesta subseção vamos apresentar a solução do problema de Heron no caso em que a reta l é qualquer. Vamos nos referir a uma reta deste tipo como sendo uma *reta transversal*.

Dado um ponto P qualquer, adotaremos as notações $x(P)$ e $y(P)$ para indicar, respectivamente, a abscissa e a ordenada do ponto P . Por exemplo, se $P = (a, b)$, então $y(P) = b$ e $x(P) = a$. Além disso, vamos usar a expressão “intersectando l verticalmente” para indicar que o primeiro segmento a intersectar a reta l é um segmento vertical. De modo análoga usaremos a expressão “intersectando l horizontalmente”.

Como na situação 1, consideraremos o caso em que os pontos P e Q estão no mesmo semiplano superior determinado pela reta l . O caso em que P e Q estão no semiplano inferior é análogo.

Proposição 3.2. *Sejam P e Q pontos situados em um mesmo semiplano determinado por uma reta l e s e r as retas verticais que passam por P e Q , respectivamente. Se R é a intersecção de s com l e G é a intersecção de r com l então, supondo $y(R) > y(G)$, um caminho mais curto de P até Q intersectando l verticalmente é dado pela poligonal $PRSQ$, onde $S = (x(Q), y(R))$.*

Figura 12. Problema de Heron: projeções de P e Q na direção vertical, com $Y(Q) < y(R)$



Fonte: Autores

$y(Z) \leq y(R)$. Para calcularmos a distância táxi percorrida $d_t(PRSQ)$ via poligonal $PRSQ$ note que

$$R = \left(a, \frac{-Aa - C}{B}\right), S = \left(c, \frac{-Aa - C}{B}\right).$$

Então,

$$\begin{aligned} d_t(PRSQ) &= \overline{PR} + \overline{RS} + \overline{SQ} \\ &= \left|b - \frac{-Aa - C}{B}\right| + |c - a| + \left|d - \frac{-Aa - C}{B}\right| \\ &= \left|\frac{Aa + Bb + C}{B}\right| + |c - a| + \left|\frac{Aa + Bd + C}{B}\right|. \end{aligned}$$

Se $y(Q) > y(P)$, a configuração da poligonal $PRSQ$ seria mantida. Por outro lado, se $Y(Q) < y(R) < y(P)$, a configuração da poligonal $PRSQ$ também seria mantida, com a diferença que, neste caso, o percurso SQ seria feito descendo ao invés de subindo. Por fim, se $y(R) < y(G)$, então basta renomear adequadamente os pontos P, Q, R e G . Isso, mostra que a hipótese $y(R) > y(G)$ é suficiente e encerramos a prova da proposição. \square

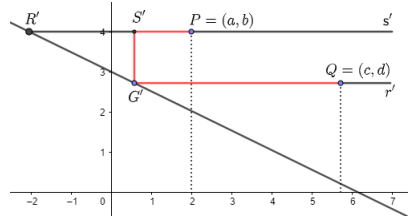
A seguinte proposição trata do caso em que a reta l é intersectada horizontalmente.

Proposição 3.3. *Sejam P e Q pontos situados em um mesmo semiplano de uma reta l e s' e r' as retas horizontais que passam por P e Q , respectivamente. Se R' é o ponto de intersecção de s' com l e G' é a intersecção de r' com l então, supondo $x(R') < x(G')$, um caminho mais curto de P até Q intersectando l horizontalmente é dado pela poligonal $PS'G'Q$, onde $S' = (x(G'), y(R'))$.*

Demonstração. Conforme no enunciado, sejam as retas l, r' e s' . Sejam ainda os pontos $P = (a, b), Q = (c, d), R' = s' \cap l, G' = r' \cap l$ e $S' = (x(G'), b)$. Como por hipótese, $x(R') < x(G')$, a Figura 13 descreve a situação em que $x(P) > x(G')$.

A ideia é provar que se M' é um ponto tal que $x(M') < x(G')$, $H' = (x(Q), y(M'))$ e $N' = (x(M'), y(P))$, então a poligonal $PS'G'Q$ fornece uma distância menor do que aquela fornecida pela poligonal $PN'M'H'Q$.

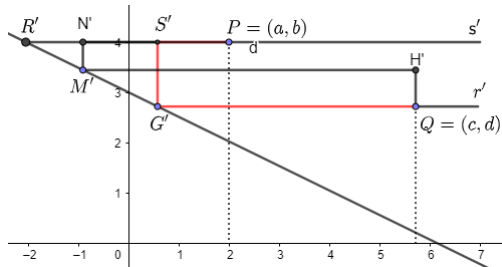
Figura 13. Problema de Heron: projeções de P e Q na direção horizontal



Fonte: Autores

Em outras palavras, se $x(M') < x(G')$, então o caminho $PS'G'Q$ fornece uma distância menor ou igual do que todos os outros caminhos que intersectam horizontalmente a reta l . Veja a Figura 14.

Figura 14. Problema de Heron: percurso mínimo com projeções horizontais e reta transversal



Fonte: Autores

Os argumentos são inteiramente análogos ao caso anterior onde consideramos as retas s e r , para análise. Para calcularmos a distância táxi percorrida $d_t(PS'G'Q)$ via poligonal $PS'G'Q$ note que

$$S' = \left(\frac{-Bd - C}{A}, b \right), G' = \left(\frac{-Bd - C}{A}, d \right).$$

Então,

$$\begin{aligned} d_t(PS'G'Q) &= \overline{PS'} + \overline{S'G'} + \overline{G'Q} \\ &= \left| a - \frac{-Bd - C}{A} \right| + |b - d| + \left| c - \frac{-Bd - C}{A} \right| \\ &= \left| \frac{Aa + Bd + C}{A} \right| + |b - d| + \left| \frac{Ac + Bd + C}{A} \right|. \end{aligned}$$

Por fim, fazendo observações análogas às feitas no final da prova da Proposição 3.2, encerramos a prova da Proposição 3.3. \square

O que expomos até aqui soluciona o problema de Heron na métrica do táxi. Temos então o seguinte teorema.

Teorema 3.1. *Sejam P e Q pontos situados no semiplano superior determinado por uma reta l .*

- i) Se l é horizontal ou vertical, então um caminho mais curto de P a Q intersectando l é dado pela poligonal $PRSQ$ onde R e S são, respectivamente, as projeções ortogonais de P e Q sobre a reta l .*
- ii) Se l é transversal, sejam R e G as respectivas interseções com l , das retas verticais que passam por P e Q . Sejam ainda R' e G' , as respectivas interseções com l , das retas horizontais que passam por P e Q . Sem perda de generalidade, suponhamos que $y(R) > y(G)$ e $x(G') > x(R')$. Nestas condições, um caminho mais curto de P a Q intersectando l é dado ou pela poligonal $PRSQ$ ou pela poligonal $PS'G'Q$, onde $S = (x(Q), y(R))$ e $S' = (x(G'), y(P))$. Além disso, se o caminho mais curto for via poligonal $PRSQ$ e $y(Q) > y(R)$, então R é o único ponto onde a reta l poderá ser intersectada mantendo-se a distância mínima no percurso. Se $y(Q) < y(R)$, então a reta l poderá ser intersectada em qualquer ponto $D \in l$ com $y(Q) \leq y(D) \leq y(R)$, mantendo-se a distância mínima no percurso. Argumentos análogos valem se o caminho mais curto for via poligonal $PS'G'Q$.*

Demonstração. Segue imediatamente das proposições 3.1, 3.2 e 3.3. □

Na situação do Teorema 3.1, o caminho mais curto de P a Q na métrica táxi, é realizado pela poligonal $PRSQ$ ou pela poligonal $PS'G'Q$. Logo,

$$f_{\min}(P, Q) = \min\{d_t(PRSQ), d_t(PS'G'Q)\}.$$

Usando a notação

$$h(x, y) = Ax + By + C, \tag{7}$$

obtemos

$$f_{\min}(P, Q) = \min\left\{\left|\frac{h(a, b)}{B}\right| + |c - a| + \left|\frac{h(a, d)}{B}\right|, \left|\frac{h(a, d)}{A}\right| + |b - d| + \left|\frac{h(c, d)}{A}\right|\right\}. \tag{8}$$

Nesta situação, o procedimento para encontrar o percurso táxi mais curto pode ser resumido assim: pelo ponto P trace a reta vertical s e a reta horizontal s' . Pelo ponto Q trace a reta vertical r e a reta horizontal r' . Considerando que os pontos P e Q estão no semiplano superior à l , determine os pontos $R = s \cap l$, $G = r \cap l$, $R' = s' \cap l$ e $G' = r' \cap l$. Dos pontos R e G considere aquele que possui a maior ordenada e dos pontos R' e G' considere aquele que possui a maior abscissa. Se os pontos considerados são R e R' , considere ainda o ponto S que possui mesma abscissa de Q e mesma ordenada de R e o ponto S' que possui mesma abscissa de R' e mesma ordenada de Q . Por fim calcule $d_t(PRSQ)$, $d_t(PR'S'Q)$ e em seguida $f_{\min}(P, Q) = \min\{d_t(PRSQ), d_t(PR'S'Q)\}$.

Observação: Se os pontos P e Q estiverem no semiplano inferior determinado por l , os argumentos são análogos.

Corolário 3.2. *Nas condições da situação ii) do Teorema 3.1:*

- i) Se $A = B$ e $C = 0$, então*

$$\begin{aligned} f_{\min}(P, Q) &= \min\{d_t(PRSQ), d_t(PS'G'Q)\} \\ &= \min\{|a + b| + |c - a| + |a + d|, |a + d| + |b - d| + |d + c|\}. \end{aligned}$$

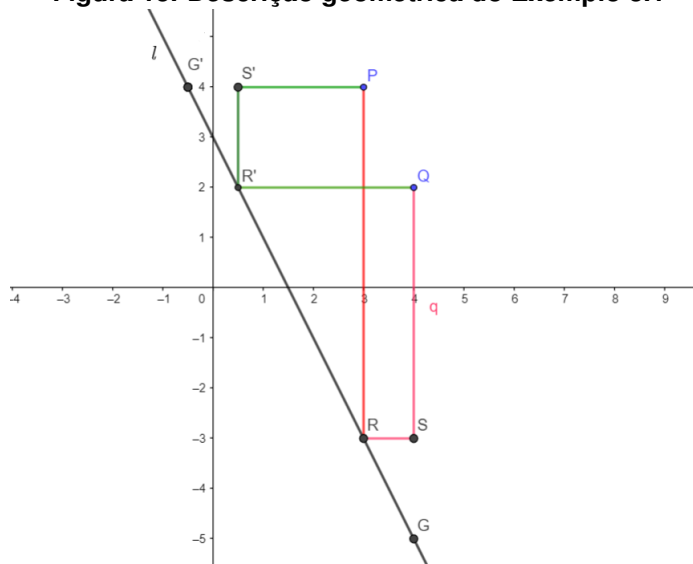
ii) Se $A = -B$ e $C = 0$, então

$$\begin{aligned} f_{\min}(P, Q) &= \min\{d_t(PRSQ), d_t(PS'R'Q)\} \\ &= \min\{|a - c| + |b - a| + |d - a|, |d - a| + |d - b| + |d - c|\}. \end{aligned}$$

Demonstração. Se $A = B$ e $C = 0$, então a equação da reta l reduz-se a $x + y = 0$. Assim, basta considerar $A = 1 = B$ para obter $h(x, y) = x + y$ e usar a Equação 8. Por outro lado, se $A = -B$ e $C = 0$, a equação da reta l reduz-se a $x - y = 0$. Neste caso, basta substituir $A = 1$ e $B = -1$ para obter $h(x, y) = x - y$ e usar a Equação 8. \square

Exemplo 3.1. Considere a reta de equação $y = -2x + 3$ e os pontos $P = (3, 4)$ e $Q = (4, 2)$. Vamos determinar os pontos R, S, R', S' destacados na Figura 15.

Figura 15. Descrição geométrica do Exemplo 3.1



Fonte: Autores

O ponto R está na reta l e possui a abscissa $a = 3$ do ponto P . Substituído-se na equação $y = -2x + 3$ obtemos $R = (3, -3)$. O ponto S tem mesma abscissa do ponto Q , isto é $c = 4$ e mesma ordenada do ponto R . Assim, $S = (4, -3)$. Desta forma obtemos,

$$\begin{aligned} d_t(PRSQ) &= \overline{PR} + \overline{RS} + \overline{SQ} \\ &= |4 - (-3)| + |3 - 4| + |-3 - 2| \\ &= 7 + 1 + 5 = 13. \end{aligned}$$

Por outro lado, o ponto R' está na reta l e possui mesma ordenada $c = 2$ do ponto Q . Substituído-se na equação $y = -2x + 3$ obtemos $R' = (\frac{1}{2}, 2)$. O ponto S' possui mesma ordenada $b = 4$ do ponto P e mesma abscissa $\frac{1}{2}$ do ponto R' . Logo, $S' = (\frac{1}{2}, 4)$. Assim,

$$\begin{aligned} d_t(PS'R'Q) &= \overline{PS'} + \overline{S'R'} + \overline{R'Q} \\ &= |3 - \frac{1}{2}| + |4 - 2| + |\frac{1}{2} - 4| \\ &= \frac{5}{2} + 2 + \frac{7}{2} = 8. \end{aligned}$$

Neste caso a melhor configuração é via a poligonal $PS'R'Q$ e

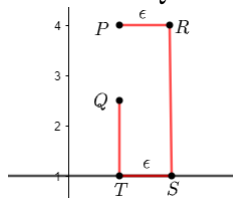
$$f_{\min}(P, Q) = d_t(PS'R'Q) = 8.$$

3.2.1. O caso em que P e Q estão em retas horizontais ou verticais

Nesta subsecção vamos comentar o caso em que os pontos P e Q estão em uma reta vertical. O caso em que estão em uma reta horizontal é totalmente análogo.

Sejam $P = (a, b)$ e $Q(a, d)$ onde $y(P) > y(Q)$, situados no semiplano superior determinado por uma reta l horizontal de equação $y = k$, conforme mostra a Figura 16.

Figura 16. Pontos P e Q em um reta vertical



Fonte: Autores

Como $PQTQ$ é um passeio que não é um caminho, afim de se constituir um caminho é necessário realizar um afastamento horizontal em algum momento antes de chegar em Q . Suponhamos que seja escolhido o caminho $PRSTQ$. Neste caso, no segmento PR foi realizado um afastamento para a direita de tamanho ϵ . Já no segmento ST foi feito um recuo de tamanho ϵ . Esse valor ϵ pode se tornar tão pequeno quanto se queira, mas não pode ser zero, pois se assim fosse, o caminho $PRSTQ$ passaria a ser o passeio $PQTQ$. Se denotarmos por \overline{PQTQ} a medida euclidiana do passeio $PQTQ$ então,

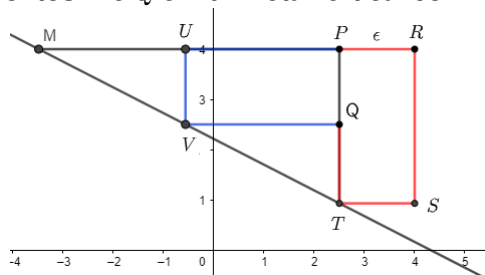
$$\overline{PQTQ} = \overline{PQ} + \overline{QT} + \overline{TQ} = |b - k| + |d - k|.$$

Assim, o número $|b - k| + |d - k|$ é uma cota inferior (não atingida) para o conjunto das distâncias percorridas via qualquer caminho que saia de P intersecte a reta l e chega em Q . Em outras palavras, não existe um caminho mais curto, nessa situação. A situação de uma reta horizontal é totalmente análoga.

Vamos olhar para a situação em que a reta l possui equação $Ax + By + C = 0$, com A e B não nulos. Além disso, sejam $P = (a, b)$ e $Q(a, d)$ em uma reta vertical com $y(P) > y(Q)$, conforme mostra a Figura 17.

Com procedimentos análogos ao que já fizemos antes, ao projetarmos os pontos P e Q na direção horizontal obtemos os pontos M e V sobre a reta l . Como $x(V) > x(M)$, construímos o caminho $PUVQ$. Por outro lado, projetando os pontos P e Q na direção vertical, obtemos o passeio $PQTQ$. Neste caso somos obrigados a realizar um afastamento horizontal de medida ϵ para obter o caminho $PRSTQ$. Assim, se $d_t(PUVQ) > \overline{PQTQ}$ então, não existe um caminho mais curto que realiza a tarefa de sair de P intersecta a reta l e chega em Q . Por outro lado, se $d_t(PUVQ) \leq \overline{PQTQ}$, então

Figura 17. Pontos P e Q em um reta vertical com reta horizontal



Fonte: Autores

$f_{\min}(P, Q) = d_t(PUVQ)$, isto é,

$$\begin{aligned} f_{\min}(P, Q) &= \left| \frac{Aa + Bb + C}{A} \right| + |b - d| + \frac{Aa + Bd + C}{A} \\ &= \left| \frac{h(a, b)}{A} \right| + |b - d| + \left| \frac{h(a, d)}{A} \right|. \end{aligned}$$

As outras situações são análogas.

Observação 3.6. *Se forem permitidos como solução passeios ao invés de caminhos então não haveria problema no caso em que P e Q estão em uma reta vertical (ou em uma reta horizontal). É uma questão de escolha no modo de definir um caminho. Nossa escolha está em consonância com a teoria dos grafos, a qual não considera como caminho aquelas situações em que existem segmentos(arcos) sobrepostos(repetidos).*

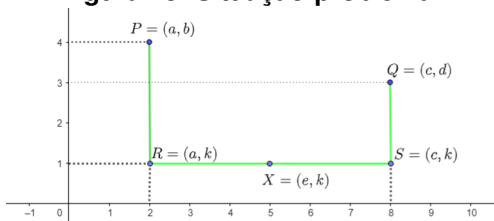
4. Outras situações-problema

Nesta seção iremos apresentar algumas situações que envolvem a geometria do táxi.

Situação-problema 1: *Suponha que um móvel tenha a missão de fazer uma entrega saindo de um ponto P , exatamente no ponto X de uma reta horizontal l e outra entrega no ponto Q no mesmo semiplano determinado por l . Determinar um caminho ideal ótimo e a distância táxi percorrida nesse caminho para realizar a missão.*

Solução: Se $x(P) \leq x(X) \leq x(Q)$, como descreve a Figura 18, o problema torna-se um caso particular do problema de Heron. Mais especificamente, vimos na situação 1 que um caminho ideal é dada pela poligonal $PRSQ$, que já contém o ponto X . Qualquer configuração de caminho que intersecte a reta l e possui somente o recuo SQ , deve levar $f_{\min}(P, Q) = d_t(P, X) + d_t(X, Q)$, pois X está fixado.

Figura 18. Situação-problema 1



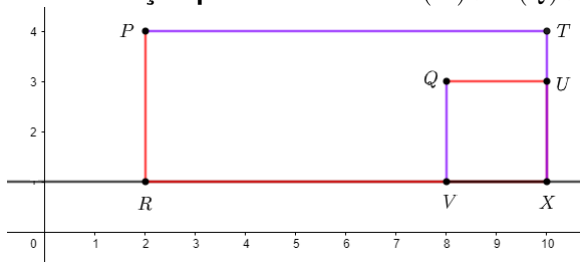
Fonte: Autores

Se considerarmos $P = (a, b), Q = (c, d), R = (a, k), S = (c, k)$ temos que

$$f_{\min}(P, Q) = d_t(PRXSQ) = d_t(PRSQ) = |b - k| + |c - a| + |d - k|.$$

Observação 4.1. Se tivermos $x(X) > x(Q)$ ou $x(X) < x(P)$, então será necessário mais um passo para chegar até Q . Por exemplo, na situação da Figura 19, os caminhos $PRXUQ$ e $PTXVQ$ são duas possibilidades.

Figura 19. Situação problema 1 com $x(X) > x(Q) > x(P)$.

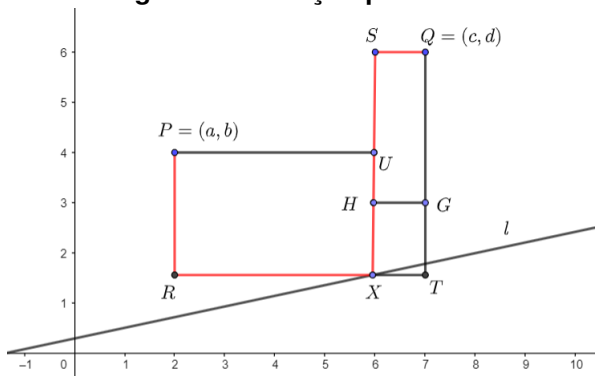


Fonte: Autores

Situação-problema 2: Suponha que um móvel tenha a missão de fazer uma entrega, saindo de um ponto P , exatamente no ponto X de uma reta transversal l e outra entrega no ponto Q no mesmo semiplano de P determinado por l . Qual o caminho mais curto a se fazer na geometria do táxi ?

Solução: Vamos considerar a situação descrita na Figura 20. Nesta situação, vamos denotar a distância táxi percorrida por d_{\min} . Como o ponto X está fixado, qualquer

Figura 20. Situação-problema 2



Fonte: Autores

configuração de caminho ideal deve fornecer $d_{\min}(P, Q) = d_t(P, X) + d_t(X, Q)$. Uma possibilidade é dada pela poligonal $PRXSQ$. Veja que

$$\begin{aligned} d_t(PRXSQ) &= d_t(P, X) + d_t(X, Q) \\ &= \overline{PR} + \overline{RX} + \overline{XS} + \overline{SQ} \\ &= \overline{PR} + \overline{RT} + \overline{TQ} \end{aligned}$$

Se a reta l possui equação $Ax + By + C = 0$ e $X = (x_o, \frac{-Ax_o - C}{B})$, então $R = (a, \frac{-Ax_o - C}{B})$

e $S = (x_o, d)$. Segue que

$$\begin{aligned} d_{\min} &= \left| b - \frac{-Ax_o - C}{B} \right| + |c - a| + \left| d - \frac{-Ax_o - C}{B} \right| \\ &= \left| \frac{Ax_o + Bb + C}{B} \right| + |c - a| + \left| \frac{Ax_o + Bd + C}{B} \right|. \end{aligned}$$

As configurações dadas pelas poligomais $PUXSQ$, $PRXTQ$, $PRXHGQ$, $PUXTQ$ e $PUXHGQ$ também fornecem d_{\min} . Note que não usamos o procedimento da situação ii) do Teorema 3.1, pois o ponto X está fixado. No teorema, procuramos um X onde se deve tocar a reta l para ter o percurso $f_{\min}(P, Q)$.

Situação-problema 3: Considere uma reta l e um ponto P fora dela. Um móvel partindo de P deve-se fazer uma entrega na reta l . Qual é o ponto X de l onde deve ser feita a entrega para que a distância táxi seja a menor possível ?

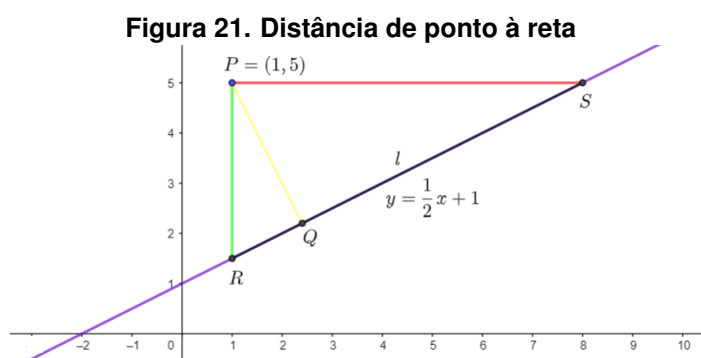
Solução: A distância que se deseja encontrar, na verdade, é a distância de P até a reta l na métrica do táxi. Em [5] LOIOLA(2015) descreve as cônicas na geometria do táxi. Além disso, mostra que se $P = (x_o, y_o)$ e l possui equação $Ax + By + C = 0$, então a distância táxi $d_t(P, l)$ de P até l , é dada por

$$d_t(P, l) = \frac{|Ax_o + By_o + C|}{\max\{|A|, |B|\}}. \quad (9)$$

A título de informação e comparação recorde que a distância euclidiana de P até a reta l é dada por

$$d(P, l) = \frac{|Ax_o + By_o + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (10)$$

Exemplo 4.1. Considere a reta de equação $x - 2y + 2 = 0$ e o ponto $P = (1, 5)$, conforme descrição na Figura 21.



Fonte: Autores

De acordo com as equações (9) e (10) temos que

$$d_t(P, l) = \frac{|1 \cdot 1 + (-2) \cdot 5 + 2|}{\max\{|1|, |-2|\}} = \frac{7}{2}$$

e

$$d(P, l) = \frac{|1 \cdot 1 + (-2) \cdot 5 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}.$$



Considerando a Figura 21, note que

$$d_t(P, l) = \min\{d(P, S), d(P, R)\} \text{ e } d(P, l) = d(P, Q),$$

onde $R = (1, \frac{3}{2})$, $S = (8, 5)$ e PQ é ortogonal à l .

5. Considerações finais

Em nosso trabalho apresentamos um outro ponto de vista do problema de Heron utilizando a geometria do táxi e mostramos como solucioná-lo.

Vale destacar que no problema clássico da geometria euclidiana, o ponto a ser tocado na reta l é único e isso determina um caminho único que minimiza a distância. No entanto, a situação muda ao considerarmos a métrica do táxi, onde podem existir infinitos caminhos ideais que minimizam a distância. Do ponto de vista prático, procura-se dentre todos os caminhos aquele(ou aqueles) que, além de minimizar a distância, também minimiza a quantidade de mudanças de direção durante o percurso. Mas, vale ressaltar que os caminhos que minimizam distância e mudanças de direção também não são únicos. Além disso, na geometria do táxi, existem situações onde a reta l é intersectada em mais de um ponto. Na verdade, se a reta l é tocada(via caminhos ideais) em mais de um ponto, necessariamente será tocada em um segmento. Para finalizar, apresentamos algumas situações similares ao problema de Heron. Acreditamos que este trabalho possa ser útil aos que possuem interesse pela geometria do táxi. Para aqueles que o interesse é o ensino básico sugerimos adaptar nossos exemplos para situações do cotidiano. Além disso, sugerimos também as referências [5], [2], [1] e [3].

Referências

- [1] FONSECA, R. S. *Problemas de otimização na geometria: uma abordagem para o ensino médio*. Dissertação: Mestrado profissional em Matemática - PROFMAT- UFAM, 2016. Dissertação Mestrado profissional em Matemática - PROFMAT- UFAM, 2016.
- [2] SANTOS, E. S. *Problemas de máximos e mínimos na geometria euclidiana* Dissertação mestrado, UFPB-CCEN, 2013.
- [3] GUSMÃO, N. L.SAKAGUTI, F. Y, PIRES, L.A. *A geometria do táxi: uma proposta da geometria não-euclidiana na educação básica*. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.19, n.2, pp.211-235, 2017.
- [4] LIMA, E.L *Espaços métricos*. 4. ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [5] LOIOLA, C.A.G., COSTA, C.S. *As cônicas na geometria do táxi*. Ciência e Natura, Santa Maria, v. 37 Ed. Especial PROFMAT, p.179–191, 2015.