



## Um Estudo da Formulação Clássica de Campos em Física

Renan Flaneto Cartier<sup>1</sup>, Elzimar de Oliveira Rufino<sup>2</sup>, Fabricio de Figueredo Oliveira<sup>3</sup>,  
Ijanílio Gabriel de Araújo<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Física – Universidade Federal de Roraima (UFRR)  
Av. Cap. Ene Garcez, 2413, Bairro Aeroporto – CEP 69310-000 – Boa Vista – RR – Brasil

<sup>2</sup>Departamento de Matemática – UFRR

<sup>3</sup>Departamento de Ciências Naturais, Matemática e Estatística  
Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA)

cartierrenan@gmail.com, elzimar.rufino@ufrr.br, fabdefig@gmail.com,  
ijanilio.araujo@ufrr.br

**Abstract.** *Field Theory, in general, is used to formulate new theories in Physics, specifies unifications of Laws well used and, playing an important role in science, civilization, and in human, with emphasis on the advancement of activity and information. Thus, in this proposal, we will make an introductory approach to the formalisms present in classical field theory, with a brief historical contextualization, showing the development and evolution of Field Theory. These formalisms are very relevant to the branch of Classical Mechanics, as in Quantum Mechanics. The objective is to aid the study for undergraduate students from any area of exact sciences and nature, in addition to enabling professional improvement to develop future work in mathematical physics. In this proposal, we insert Newtonian, Lagrangian and Hamiltonian formalisms, in addition to mentioning the relativistic approach.*

**Keywords:** *Field Theory, Newtonian, Lagrangian and Hamiltonian Formalisms.*

**Resumo.** *Teoria de Campo, em geral, é utilizada para formular novas teorias em Física, visando unificações de Leis bem estabelecidas e, desempenhando papel importante na ciência, civilização, e na atividade humana, com destaque sobre o avanço da tecnologia e informação. Assim, nesta proposta, faremos uma abordagem introdutória aos formalismos presentes na teoria clássica de campos, com uma breve contextualização histórica, mostrando o desenvolvimento e a evolução da Teoria de Campos. Estes formalismos são muito relevantes tanto no ramo da Mecânica Clássica, quanto na Mecânica Quântica. O objetivo é auxiliar o estudo para alunos de graduação de quaisquer áreas das ciências exatas e da natureza, além de possibilitar aperfeiçoamento profissional para desenvolver futuros trabalhos em Física matemática. Nesta proposta, inserimos os formalismos newtoniano, lagrangiano e hamiltoniano, além de mencionar a abordagem relativística.*



*Palavras-chave: Teoria de Campo, Formalismos Newtoniano, Lagrangiano e Hamiltoniano.*

## **1. Introdução**

### **1.1. Apresentação**

A proposta do trabalho é desenvolver um estudo de introdução da teoria clássica de campo, com enfoque na formulação teórica em Física, observando a base conceitual de Física e fenômenos físicos correspondentes, visando compreensão em aplicação de estudos futuros referentes às teorias clássica e quântica de campos.

### **1.2. Motivação**

Observou-se dificuldade de aprendizagem na abordagem de teoria de campo, dessa forma, escolheu-se a temática de estudo de Física, tratando-se de campos físicos com relação ao estudo da Gravitação e do Eletromagnetismo, em geral, como temáticas em destaque na literatura.

Para desenvolver o estudo, realizou-se uma revisão da literatura, partindo da origem da Teoria de Campo, prosseguindo com o estudo de Faraday (1791-1867), e em seguida, a contribuição de Albert Einstein (1879-1955), sobre a teoria da relatividade, que deu relevância em Física aos campos, postulando-se uma velocidade limite de propagação de campo.

### **1.3. Objetivos**

#### **1.3.1. Objetivo geral**

Fazer uma revisão teórica e histórica da teoria de campos a fim de auxiliar na compreensão da formulação e unificação de teorias em Física.

#### **1.3.2. Objetivos específicos:**

- Estudar os formalismos lagrangiano e hamiltoniano para entender o desenvolvimento de teorias de campo em Física;
- Compreender teoria clássica de campos relativística.

### **1.4. Organização**

O estudo está organizado em 5 seções, apresentando a proposta na seção 1. Na seção 2 é realizada uma fundamentação histórica do estudo de Campos em Física. Na seção 3, iremos discutir dois formalismos lagrangiano e hamiltoniano que são importantes para o estudo de Física. Na seção 4, discutiremos a respeito da necessidade de utilização de formalismos alternativos ao newtoniano. Na seção 5, apresentaremos as considerações finais.



## 2. Fatos Históricos

A ideia de campo teve origem no século XIX, junto à ascensão da eletrodinâmica. Alguns eventos importantes para o desenvolvimento da teoria dos campos, a partir de 1780, foram apresentados conforme literatura ([Forger 1993], [Kompneyets 1961], [Machado 2007]), destacando-se as descobertas, por ordem cronológica, em marco histórico [Rocha 2015]:

- 1745 - A garrafa de Leyden;
- 1780 - Descoberta de Galvani;
- 1785 - Lei de Coulomb;
- 1799 - Pilha de Volta;
- 1800 - Experiências eletroquímicas de J.W. Ritter;
- 1820 - Lei de Oersted;
- 1822 - Interpretação de Ampère do magnetismo como eletricidade em movimento;
- 1826 - Lei de Ohm;
- 1831 - Lei da indução de Faraday;
- 1856 - Experiência de W. Weber e R. Kohlrausch;
- 1862 - Equações de Maxwell: integração da óptica ao eletromagnetismo;
- 1870 - Confirmação da relação  $n = \sqrt{\epsilon}$  por L. Boltzmann;
- 1888 - Exibição de ondas eletromagnéticas por H. Hertz;
- 1890 - Formulação moderna das equações de Maxwell por H. Hertz;
- 1905 - Relatividade Restrita;



- 1915 - Relatividade geral.

## 2.1. História do Campo

A Física, em 1800, estava basicamente dividida em duas áreas de estudo: o Atomismo e o Dinamismo. Nessa época, a mecânica newtoniana representava um grande avanço científico, junto com o cálculo diferencial e integral, como mostra na Tabela (2.1). Em 1788, foi publicada a *Mècanique Analytique* de Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) como uma apresentação fechada da mecânica, incluindo-se a mecânica dos meios contínuos, baseada em poucos princípios, e que continua válida [Forger 1993].

A Mecânica passou a ser um modelo de se fazer ciência. Outras áreas da Física e até mesmo de outras áreas do conhecimento passaram a copiar abordagens e métodos próprios. Para exemplificar, a lei da gravitação universal de Newton (1642-1726/1727),  $\mathbf{F} = \gamma(m_1 m_2 / r^3) (-\mathbf{r})$ , sendo  $\mathbf{F}$  a força (atração) entre as massas  $m_1$  e  $m_2$ ,  $\gamma$  Constante Universal da Gravitação,  $(-\mathbf{r})$  o vetor posição (unitário) relativo entre as massas, e  $r$  o módulo do vetor posição,  $r = \|\mathbf{r}\|$ . Assim, tornou-se exemplo padrão de uma lei universal, na física clássica, de forças simples com um grande número de aplicações dentro da sua limitação de validade. O que se esperava era poder descrever outros problemas físicos por leis semelhantes, por analogia.

A lei de Coulomb, a qual descreve a força entre partículas carregadas em equilíbrio estático, foi um grande passo nesta direção. Além disso, a mecânica dos pontos materiais de Newton combinava perfeitamente com a ideia de que toda a matéria seria composta de átomos [Nussenzveig 1997].

Algumas áreas da Física, por exemplo Termodinâmica, Óptica, Eletricidade, Magnetismo e Galvanismo, que ainda não haviam atingido o nível semelhante de desenvolvimento do que a Mecânica, procuraram incorporar-se à Mecânica ou pelo menos seguir os moldes semelhantes de formulação.

Apesar das tentativas de explicar os fenômenos físicos por meio da mecânica Newtoniana, existiu um movimento em outra direção. Durante muito tempo tentou-se entender, a mecânica dos astros a partir de ideias da Hidrodinâmica. A lei de Coulomb e a lei da gravitação universal de Newton são muito parecidas com o campo de velocidades de um fluido incompressível que escoar de uma fonte pontual. A dependência do inverso do quadrado da distância à fonte do centro de forças, isto é, o termo  $(1/r^2)$ , também é uma característica da luminosidade aparente de uma fonte pontual de luz [Oliveira 2005].

Houve, através da hipótese da existência de determinados **fluidos** (quantidades características que emanam de corpos quentes, luminosos, carregados eletricamente, magnetizados ou galvânicos), a tentativa de explicar fenômenos calóricos, ópticos, elétricos, magnéticos e galvânicos. Estes "fluidos" saíam do corpo fonte e percorriam o espaço até influenciar outros corpos.

**Tabela 2.1. Áreas de atuação da Física em torno de 1800**



Mecânica dos pontos materiais (Atomismo)	Física do contínuo (Dinamismo)
Lei da gravitação universal de Newton;	
Lei de Coulomb	Hidroestática e Hidrodinâmica; Mecânica dos meios rígidos e elásticos e dos gases (acústica); Termodinâmica; Óptica; Eletricidade; Magnetismo; Galvanismo
Ação a longa distância instantânea	Ação a curta distância retardada

**Fonte:** *Elementare Feldtheorie: Elektrodynamik, Hydrodynamik, Spezielle Relativitäts theorie*[Forger 1993].

## 2.2. O Campo de Faraday

Faraday, através do seu conceito de campo, iniciou a formulação conceitual e qualitativamente correta das ideias dinâmicas (de acordo com a Tabela (2.1)). Ele imaginou o espaço cheio de campos feitos de linhas de força elétrica e magnética que associariam-se às linhas de fluxo dos fluidos correspondentes (fluido elétrico e magnético). Entretanto, ele não foi capaz de dar uma descrição matemática das linhas de força ([Forger 1993], [Landau 2004]).

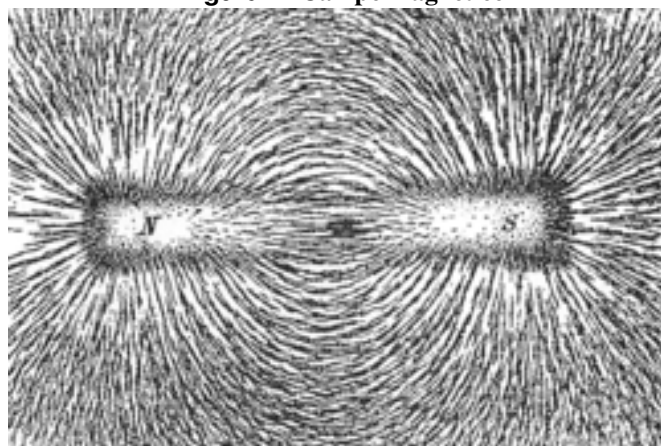
Em resumo, Faraday introduziu o conceito de campo, com uma noção completamente diferente da mecânica Newtoniana. O espaço passou a ser o substrato para linhas de força e campos. Desta forma, Faraday possibilitou a formulação exata de um conceito, até então, considerado místico.

Na Figura 1, podemos observar um exemplo de campo, através do comportamento das linhas de força na presença de um campo magnético. Neste exemplo, colocando-se uma folha de papel sobre uma barra de ímã, e salpicando-se limalhas de ferro sobre a mesma, evidencia-se a presença dos polos magnéticos Norte(N)-Sul(S) da barra de ímã: trata-se de um dipolo magnético. Isto é, os polos conjugados de um objeto magnético são nomeados, respectivamente, polo magnético norte e polo magnético sul.

Na Figura 2, observamos o comportamento da interação entre limalhas de ferro na presença de um campo magnético.

Na Figura 3, observamos o sistema Terra-Lua, um exemplo do campo gravitacional que é gerado nas regiões próximas aos corpos que têm massa. Seu valor é proporcional à massa e inversamente proporcional à distância ao centro do corpo. Neste caso, a Lua permanece na órbita da Terra devido ao campo gravitacional.

No caso de um campo gravitacional [Freedman 2009], em relatividade, podemos observar a deformação do espaço, através da teoria da relatividade geral, em que as propriedades geométricas são afetadas pela presença da matéria, conforme é indicado na Figura 4. Nesta Figura 4, podemos observar uma representação bidimensional de um espaço

**Figura 1. Campo magnético**

Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Magnetismo>.

curvo [Freedman 2009]. Considera-se que o espaço (representado pelo plano) seja distorcido por um objeto com massa muito grande (o Sol). A luz proveniente de uma estrela muito longe (linha contínua) segue a trajetória através da superfície distorcida em seu caminho para a Terra. A linha tracejada indica a direção *aparente* do raio de luz proveniente da estrela [Freedman 2009].

### 2.3. Equações de Maxwell e o Campo

Após os trabalhos de Lord Kelvin (1824-1907), James Clerk Maxwell (1831-1879) pôs as ideias de Faraday na sua formulação matemática definitiva. A introdução do seu termo adicional (corrente de deslocamento) fez com que as equações do campo eletromagnético (equações de Maxwell), publicadas por ele em 1862, além de unificar forças elétricas e magnéticas, permitiam soluções ondulatórias, com uma velocidade de propagação que coincidia com a velocidade da luz.

Portanto, era de se suspeitar que a óptica também pudesse ser vista como uma subárea do eletromagnetismo [Machado 2007]. As equações de Maxwell se estabeleceram como sendo uma teoria completa de todos os fenômenos eletromagnéticos e ópticos clássicos (não quânticos). Assim, constituindo-se em uma teoria de campos, um tipo de teoria física que, na época, era absolutamente fato novo, e inédito, de tal importância, comparada à Mecânica Newtoniana.

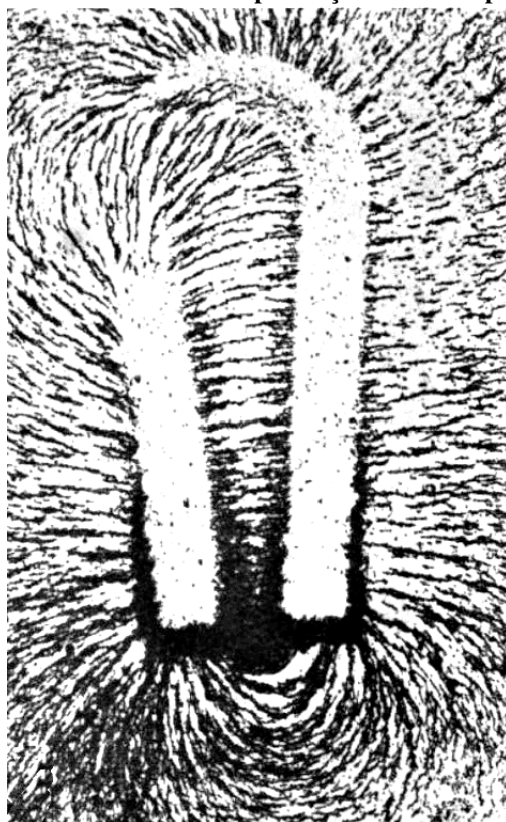
### 2.4. Sobre o Éter

Considerando o Campo Eletromagnético de fato real, questiona-se qual seria o meio material associado, levando-se em conta que os campos clássicos são todos vinculados a algum meio material. Pode-se pensar como exemplo o campo de velocidades do escoamento de um fluido, o qual seu meio material vinculado é o próprio fluido. Outro exemplo é o campo de ondas acústicas, que é vinculado ao meio no qual as ondas se propagam [Çengel 2012].

Para responder a esse questionamento, surgiu a ideia do éter. Um meio material hipotético para o campo eletromagnético, que deveria possibilitar a propagação de ondas



**Figura 2. Limalhas de ferro na presença de um campo magnético**



**Fonte:**

[https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic\\_field#/media/File:Magnetic\\_field\\_of\\_horseshoe\\_magnet.png](https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic_field#/media/File:Magnetic_field_of_horseshoe_magnet.png).

eletromagnéticas e, portanto, ser uma espécie de meio elástico que não interfere no movimento dos corpos.

No final do século XIX, a ideia do éter entrou em crise, devido à impossibilidade de detectar qualquer movimento relativo ao éter (por exemplo, experiência de Michelson-Morley), até ser abolida com o advento da teoria da relatividade restrita (1905) de Einstein [Marion 2016].

## **2.5. Noções de Campo em Física Moderna**

A Física Moderna assume que o conceito de campo ocupa uma posição de protagonista, se contrapondo à noção do ponto material que sofreu alterações, até se tornar o estado de comportamento do sistema, desencadeando (degenerando-se) em uma interpretação de dualismo onda-partícula [Eisberg 1979]. A onda e/ou partícula são aspectos diferentes de um conceito mais geral e mais abrangente, o de campo [Kompneyets 1961].

Segundo [Nussenzveig 2002]:

”Além das forças eletromagnéticas e das forças gravitacionais, conhecemos atualmente outras duas interações fundamentais: a interação forte e a interação fraca que, entre outras coisas, são responsáveis pela coesão dos núcleos e pelo fenômeno da radioatividade”.

**Figura 3. Sistema Terra-Lua**

**Fonte:** <https://www.preparaenem.com/fisica/campo-gravitacional.htm>.

Cada uma destas interações é descrita por uma teoria de campos apropriada. Entretanto, a força eletromagnética e a força gravitacional são as únicas que, sendo de longo alcance, podem ser descritas por uma teoria clássica de campos. A força forte e a força fraca são de curto alcance (dimensões atômicas) e, por isso, só podem ser obtidas através de uma teoria quântica de campos, conforme pode-se observar a ordem de escala em intensidade relativa e, o alcance, quantidade física medida, nos dados da Tabela 2.5.

As teorias de campos, para as interações eletromagnéticas fracas e fortes, são bem semelhantes: todas são exemplos de uma **teoria de calibre** (*gauge*), o que nos leva a imaginar uma possível unificação das interações fundamentais.

Nas últimas décadas, houve um considerável progresso nesta unificação, com o surgimento de uma teoria de calibre, que unifica as interações eletromagnéticas com as interações fracas, a qual rendeu aos pesquisadores Abdus Salam (1926-1996), Sheldon Glashow (1932) e Steven Weinberg (1933-2021) o Prêmio Nobel de Física do ano 1979.

**Tabela 2.5. Forças Fundamentais**

Interação	(Ordem de) Intensidade Relativa	Alcance
Forte	1	$10^{-15}$ m
Eletromagnética	$10^{-2}$	infinito
Fraca	$10^{-5}$	$10^{-18}$ m
Gravitacional	$10^{-40}$	infinito

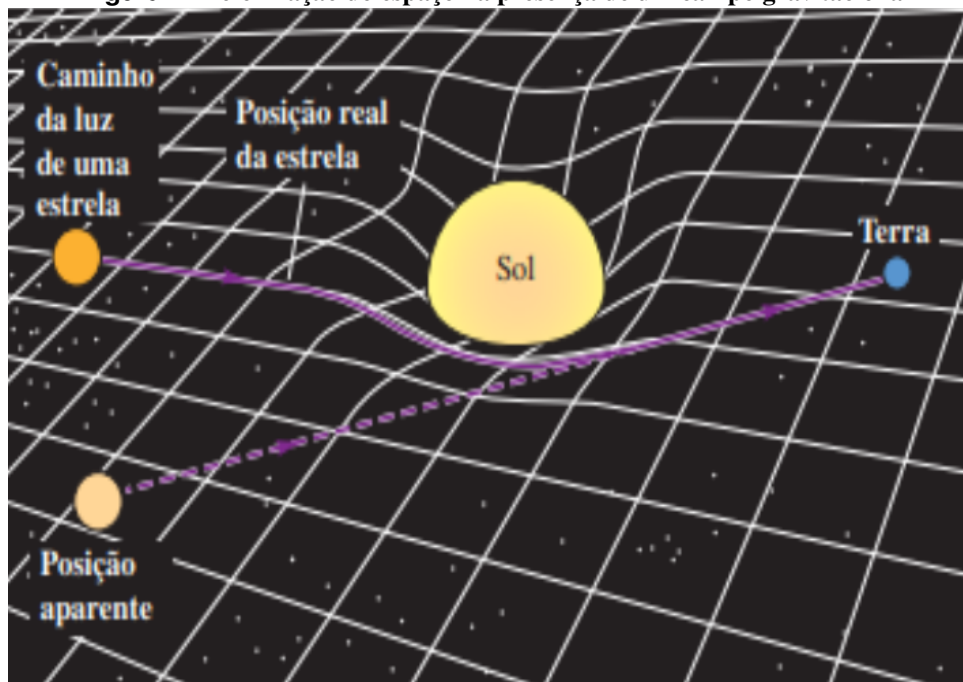
**Fonte:** *Elementare Feldtheorie: Elektrodynamik, Hydrodynamik, Spezielle Relativitätstheorie*[Forger 1993].

### 3. Formulações de Lagrange e Hamilton

Muitos problemas na mecânica Newtoniana são analisados através de formas alternativas das suas leis, incluindo as **Equações de Lagrange** e o **Princípio de Hamilton** ([Landau 2004], [Goldstein 2000]). Para este estudo é necessário a utilização de métodos do **Cálculo de Variações** (ou **Cálculo Variacional**).

O desenvolvimento do cálculo variacional foi iniciado por Newton (1686) e ampliado por Johann e Jakob Bernoulli (1696) e por Euler (1744). Adrien Legendre (1786),



**Figura 4. Deformação do espaço na presença de um campo gravitacional**

Fonte: [Freedman 2009].

Joseph Lagrange (1788), Hamilton (1833) e Jacobi (1837) fizeram contribuições importantes.

Para as equações de Lagrange constituírem uma descrição apropriada da dinâmica de partículas, elas devem ser equivalentes às equações de Newton. Por outro lado, o Princípio de Hamilton pode ser aplicado a uma faixa ampla de fenômenos físicos (particularmente aqueles que envolvem **campos**). O Princípio de Hamilton não nos oferece uma teoria diferente da teoria de Newton, mas permite uma unificação satisfatória de várias teorias individuais por um único postulado básico [Marion 2016]:

”De todos os caminhos possíveis nos quais um sistema dinâmico pode se mover de um ponto a outro em um intervalo de tempo específico, o caminho real seguido é aquele que minimiza a integral temporal da diferença entre energias cinética e potencial.”

E pode ser escrito, por meio do método de cálculo variacional, como:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0, \quad (1)$$

onde  $\delta$  denota variação funcional,  $T$  e  $U$  representam respectivamente, os funcionais energia cinética e energia potencial, e  $dt$  a variação temporal.

O Princípio de Hamilton é uma generalização de todos os princípios mínimos em mecânica. Os **princípios** da mínima ação (1), da restrição mínima e o da curvatura mínima são variações aplicativas do Princípio de Hamilton.

### 3.1. Cálculo Variacional

Em resumo, o problema que o cálculo variacional deve resolver é determinar uma função  $y(x)$  de tal modo que a integral ([Arfken 2007], [Goldstein 2000])

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f \left[ y(x), \frac{dy(x)}{dx}; x \right] dx \quad (2)$$

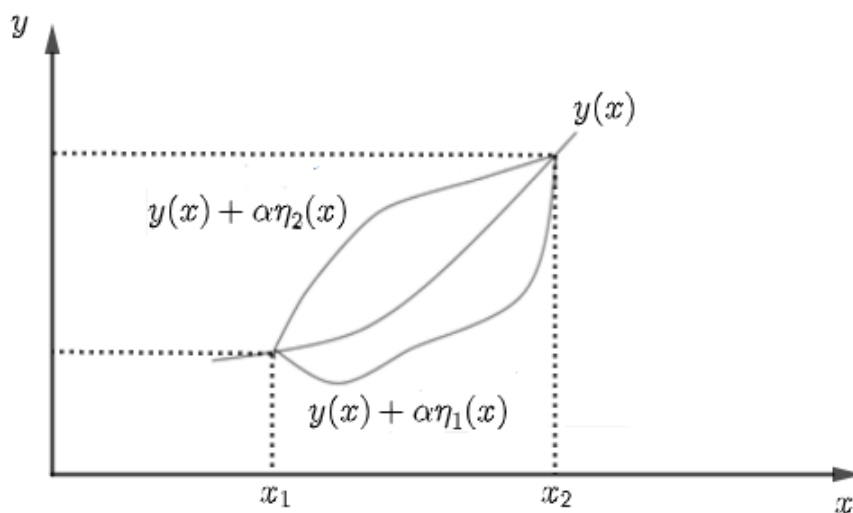
é um extremo (máximo ou mínimo). Nesta equação (2),  $J$  é a generalização de uma função conhecida como funcional, o ponto-e-vírgula (;) em  $f$  separa a variável independente  $x$  das duas variáveis dependentes  $y$  e  $\frac{dy}{dx}$ .  $J$  depende da função  $y(x)$ , e os limites de integração  $x_1$  e  $x_2$  são fixados. Assim,  $y(x)$  é variada até um valor extremo de  $J$  ser encontrado. Esta variação é dada a partir da definição de variação de função na vizinhança da sua imagem, isto é, cálculo variacional. Dessa forma, devemos estudar o comportamento de variações de uma função, no nosso caso de interesse, avalia-se  $y(x)$ .

Por exemplo, representamos as funções vizinhas através de uma forma paramétrica de todas as funções possíveis de  $y$ , de modo que:

$$y = y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha\eta(x), \quad (3)$$

onde  $y(0, x) = y(x)$ , e  $\eta(x)$  é alguma função de  $x$  que tem primeira derivada contínua e que esta desaparece em  $x_1$  e  $x_2$ , ou seja,  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ , pois a função variada  $y(\alpha, x)$  deve ser idêntica a  $y(x)$  nos pontos finais do caminho (3), i.e,  $y(\alpha, x_1) = y(x_1)$  e  $y(\alpha, x_2) = y(x_2)$ , conforme é indicado na Figura 5. A função  $y(x)$  é o caminho que faz o funcional  $J$  um extremo. As funções vizinhas  $y(x) + \alpha\eta(x)$  desaparecem (somem) nos pontos finais, mas não são caminhos que façam  $J$  ser um extremo.

Figura 5. Determina um funcional  $J$  extremo



Fonte: Imagem adaptada do livro  
*Dinâmica Clássica de Partículas  
e Sistemas.*

Com isso,  $J$  torna-se um funcional de parâmetro  $\alpha$ , a saber:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f \left[ y(\alpha, x), \frac{dy(\alpha, x)}{dx}; x \right] dx. \quad (4)$$



A condição para que a integral ( $J(\alpha)$ ) seja um **valor estacionário**, é que  $J$  seja independente de  $\alpha$ , em primeira ordem de aproximação, ao longo do caminho em que  $J$  é um extremo, ou seja:

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0, \quad (5)$$

para todas as funções  $\eta(x)$ . Esta relação (5) é uma condição necessária, mas não suficiente.

### 3.2. Equação de Euler

Para determinar o resultado da condição estacionária do funcional  $J$ , devemos calcular a derivada parcial ([Butkov 1988], [Goldstein 2000]) de  $J$  em relação ao parâmetro  $\alpha$ , dada pela equação (4), então:  $\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial J}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} f \left[ y(\alpha, x), \frac{dy(\alpha, x)}{dx}; x \right] dx$ .

Como a função integranda  $f$  é contínua, e os limites de integração são fixos, a derivada parcial afetará apenas o integrando, devido ao fato da função integranda ser contínua. Dessa forma, podemos reescrever a expressão da derivada parcial, na forma:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right] dx, \quad (6)$$

onde  $y' = \frac{dy}{dx}$ .

Isto é, reescrevendo a relação (6), teremos

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx, \quad (7)$$

e resolvendo a segunda integral (dentro dos colchetes(7)) pelo método de integração por partes, em seguida, aplicando a condição estacionária, ficaremos com a relação

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] \eta(x) dx = 0, \quad (8)$$

desde que a relação (8) seja satisfeita pela relação (9)

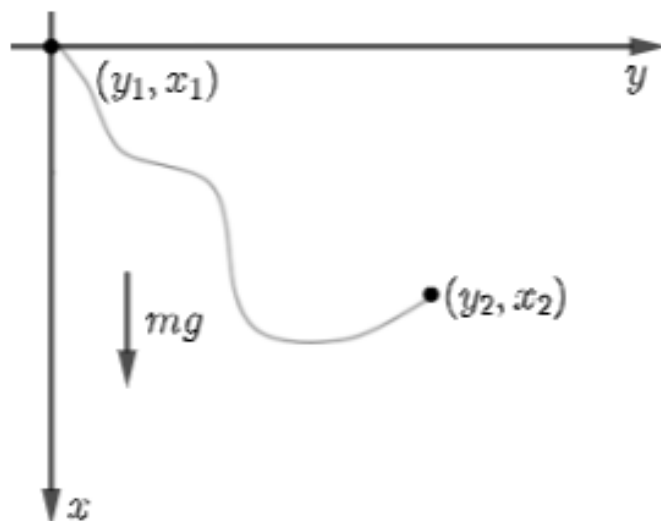
$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0. \quad (9)$$

O resultado ocorre pelo fato da função  $\eta(x)$  poder assumir qualquer forma, fazendo com que necessitemos restringir apenas o valor do primeiro fator do integrando. Esta equação é conhecida como **Equação de Euler**.

O cálculo de variações é muito útil para resolver problemas, como exemplo o problema da **braquistócrona** [Butkov 1988]. E neste caso, consideremos uma partícula que se move em um campo de forças constante, iniciando-se seu movimento a partir do repouso, por exemplo, tomando como referência um ponto  $(x_1, y_1)$ , e o sistema evoluindo-se até um ponto inferior  $(x_2, y_2)$ , conforme é mostrado na Figura 6. Assim, devemos encontrar a **trajetória**, tal que o **tempo** seja **minimizado**.

Para resolver o problema, escolhemos um referencial em que  $(x_1, y_1)$  esteja na origem, e que o campo constante tenha mesma direção e sentido do eixo  $x$ , conforme é indicado na Figura 6.

**Figura 6. Caminho que leva uma partícula entre dois pontos no menor tempo possível**



**Fonte:** Imagem adaptada do livro *Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas*.

Desconsiderando qualquer tipo de força de fricção [Nussenzveig 2002], dizemos que o sistema é conservativo e, portanto, a **Energia Mecânica** é uma constante (Princípio de Conservação da Energia Mecânica), ou seja,  $T + U = \text{constante}$ , sendo  $T = mv^2/2$  a energia cinética e  $U = -Fx = mgx$  a energia potencial da partícula, onde  $g$  é a aceleração transmitida pela força  $F$ . Como a partícula parte do repouso, a energia cinética em  $(x_1, y_1)$  é zero e a energia potencial, neste ponto, também anulará-se, pois o ponto é a origem (coincidindo). Assim,  $T + U = 0$ , determinando o valor da velocidade  $v = 2gx^{1/2}$ .

Por outro lado, o módulo do vetor velocidade é dado, por  $v = [(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2]^{1/2}$ , e o elemento de tempo  $dt$ , no intervalo de tempo  $t + dt$ , será, portanto, o quociente do módulo do vetor deslocamento dividido pelo módulo da velocidade,  $dt = \frac{[(dx)^2 + (dy)^2]^{1/2}}{v(x)}$ , isto é,  $dt = \left[ \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{2gx} \right]^{1/2}$ .

Como queremos minimizar o tempo, trataremos o funcional tempo, trocando-se a variável  $J$  por  $t$  na condição estacionária de extremo no funcional (ação)  $J$ , ficando com a expressão

$t = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \left[ \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{2gx} \right]^{1/2}$ , ou, explicitando a dependência de  $y$  como uma função de  $x$ :

$$t = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{1 + y'(x)^2}{2gx} \right]^{1/2} dx.$$

A equação de Euler para este problema toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial f(x, y')}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f(x, y')}{\partial y'} = 0, \quad (10)$$

onde  $f(x, y') = \left[ \frac{1+y'(x)^2}{2gx} \right]^{\frac{1}{2}}$ . O primeiro termo da equação de Euler (10) será anulado, pois  $f(x, y')$  não depende explicitamente de  $y$ , restando o segundo termo, e integrando este em relação  $x$ , obteremos

$\frac{\partial f}{\partial y'} = K$ , onde  $K$  é uma constante. Calculando a derivada parcial em relação a variável  $y'$  explícita, teremos a relação

$\left[ \frac{y'(x)^2}{x(1+y'(x)^2)} \right] = 2gK^2$ . Definindo  $2gK^2 = \frac{1}{2a}$ , onde  $a$  é uma constante, ficaremos com a relação

$\left[ \frac{y'(x)^2}{x(1+y'(x)^2)} \right] = \frac{1}{2a}$ . Isolando  $y'$  e aplicando a integração em ambos os lados, temos

$y = \int \frac{xdx}{(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}}$ . Resolvendo a integral em um sistema de coordenadas polares\*,  $x = a(1-\cos\theta)$  e  $dx = a\sin\theta d\theta$ , obteremos o resultado

$$y = a(\theta - \sin\theta) + \text{constante}.$$

As equações paramétricas para o caminho percorrido pela partícula, minimizando o tempo, serão dadas por:  $x = a(1-\cos\theta)$  e  $y = a(\theta - \sin\theta)$ , definindo a trajetória do problema, que neste caso, a curva obtida é conhecida na literatura como **ciclóide**. Neste exemplo simples, destacamos a importância dos métodos do Cálculo Variacional, por isso é muito utilizado no estudo de Física em geral.

#### 4. Discussão da necessidade das formulações de Lagrange e Hamilton frente à limitação da formulação de Newton

Partindo da formulação de Newton, a equação  $F = ma$  nos diz que a taxa de variação do momento linear (cinético) é igual a força aplicada. E denotando-se o momento por  $p$ , temos uma versão geral da segunda lei de Newton [Goldstein 2000]:

$$\frac{dp}{dt} = \dot{p} = F, \quad (11)$$

chamada de **equação do movimento de Newton**, onde  $F$  é dada por uma função vetorial  $F(x, y, z)$  dependente da posição, ou seja, vetor posição de componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$ , isto é,  $F$  é um campo vetorial em (11). Considerando que a massa é independente do tempo, então  $\frac{dp}{dt} = m\ddot{r} = ma$ .

A seguir, forneceremos uma aplicação em que surge força escondida na solução do problema, não prevista sob condição inicial [Mcquarrie 1976]. Considere um sistema consistindo do movimento bidimensional de um corpo sob a ação de uma força coulombiana (atrativa) centrada em um ponto.

No caso, a força é dada por  $F = -k\frac{r}{r^3}$ , onde  $k$  é uma constante e  $\frac{r}{r}$  é um vetor unitário na direção do vetor posição  $r$ . Isto é, o módulo da força é  $\frac{k}{r^2}$  na direção radial.

\* $(r, \theta)$ , onde o raio  $r = a$ .

A equação de Newton para o problema produzirá o seguinte sistema de equações das componentes de  $\mathbf{F}$ , a resolver:

$$m\ddot{x} = -\frac{kx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{e} \quad m\ddot{y} = -\frac{ky}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Para resolver o sistema é mais conveniente (simples) tratar o problema em um sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$ , e fazendo a transformação de coordenadas, temos:  $x = r\cos\theta$  e  $y = r\sin\theta$ . Em seguida, realizando algumas diferenciações diretas, e substituindo nas equações (componentes) de Newton, encontraremos as equações:

$$[m(\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r) + \frac{k}{r^2}]\cos\theta - m(r\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{r})\sin\theta = 0,$$

$$[m(\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r) + \frac{k}{r^2}]\sin\theta + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{r})\cos\theta = 0.$$

Multiplicando a primeira equação por  $\cos\theta$  e a segunda por  $\sin\theta$ , e em seguida, somando as duas equações lado a lado, obteremos a equação equivalente:  $m(\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r) + \frac{k}{r^2} = 0$ . Esta pode ser simplificada na forma  $\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$ , o que implica o termo  $mr^2\dot{\theta}$  ser uma constante. Esta quantidade,  $mr^2\dot{\theta}$ , que mantém seu valor fixo durante o movimento da partícula, é chamada de momento angular da partícula, e é denotado por  $l$ . O momento angular é sempre conservado se o campo de forças agindo sobre a partícula é do tipo força central.

Com esse fato podemos eliminar, completamente, qualquer dependência da equação equivalente  $m(\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r) + \frac{k}{r^2} = 0$  em relação ao  $\dot{\theta}$ , obtendo apenas uma equação em  $r$ , a saber:

$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{k}{r^2} = 0$ , ou pondo na forma  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , ou seja,  $\frac{l^2}{mr^3} - \frac{k}{r^2} = m\ddot{r}$ . Assim, o termo  $\frac{l^2}{mr^3}$  é uma força bem conhecida, a força centrífuga e deve ser introduzida para a equação radial da força.

Isto constitui a principal desvantagem da aproximação newtoniana. A forma da equação

$$m\ddot{\eta} = F_{\eta}, \quad (12)$$

onde  $\eta$  é uma coordenada generalizada [Goldstein 2000] na equação de movimento para o sistema físico, encontrada nas Formulações de Lagrange e de Hamilton. Coordenadas generalizadas permitem entender a dinâmica do sistema no espaço de fase bidimensional (plano de fase) com coordenadas generalizadas da posição (ou  $x$  em sistema cartesiano) e da velocidade (ou  $\dot{x}$  em sistema cartesiano). O conceito de espaço de fase se aplica aos vários campos da Física. Por exemplo, no caso de osciladores, ou seja, um oscilador geral com  $n$  graus de liberdade, o espaço de fase é um espaço  $2n$  dimensional. Em geral, as coordenadas generalizadas podem ser utilizadas para definir um espaço de configuração dimensional  $s$  (associado ao número de graus de liberdade do sistema), com cada ponto representando um certo estado do sistema.

Para Lagrange ([Goldstein 2000],[Marion 2016]), as coordenadas generalizadas são  $(q, \dot{q})$  ou  $(q_j, \dot{q}_j)$ , onde  $q$  ou  $q_j$  representa a coordenada generalizada da posição da partícula, e  $\dot{q}$  ou  $\dot{q}_j$  é a sua correspondente coordenada generalizada da velocidade. E na formulação de Hamilton, teremos as coordenadas generalizadas  $(q, p)$ , onde  $p$  é o



momento canonicamente conjugado à coordenada generalizada da posição  $q$ . Isto é, nestas duas formulações a equação de movimento, que governa a dinâmica do sistema físico, não deve depender da escolha do sistema de coordenadas utilizado, pois a Física do problema em estudo não deve depender do sistema de coordenadas envolvido no problema, dessa forma, coordenadas generalizadas são válidas para qualquer escolha do sistema de coordenadas.

Nesta forma da equação fundamental da formulação de Newton (12), expressa em coordenadas generalizadas, esta é válida **apenas no sistema de coordenadas cartesianas**  $(x, \dot{x})$ , como uma limitação desta formulação, a menos que estejamos preparados para definir forças adicionais, como por exemplo acima, a força centrífuga que surgiu no decorrer do desenvolvimento do problema, neste caso, foi detectada no final da resolução do problema, e não observada no início do estudo.

Às vezes estas forças adicionais são muito confusas para descobrir na avaliação do desenvolvimento do problema, como no exemplo acima. Neste caso, é necessário a utilização das formulações de Lagrange e de Hamilton, que não estão presas a nenhum sistema de coordenadas, podendo-se utilizar coordenadas generalizadas desde o início da resolução do problema físico, avaliando-se o ponto de partida do problema, com todas as contribuições de energia do sistema envolvido, a partir do ponto de partida do problema, na descrição de Lagrange com o operador funcional energia Lagrangiano, conforme definido na relação (1),  $L(x, \dot{x}) \equiv L(q, \dot{q}, t) = T - U$ , que fornece a função energia do sistema, a lagrangiana, ou de modo semelhante, na formulação de Hamilton, definindo-se o operador Hamiltoniano, dando a função hamiltoniana, a energia do sistema.

#### 4.1. Nota sobre Coordenadas Generalizadas

Coordenadas generalizadas ([Goldstein 2000],[Marion 2016],[Butkov 1988]) é qualquer conjunto de quantidades que especificam o estado de um sistema físico. As coordenadas generalizadas são normalmente formuladas como  $q_1, q_2, \dots$ , ou por  $q_j$ . Um conjunto apropriado de coordenadas generalizadas é um conjunto de coordenadas generalizadas independentes, cujo número destas, envolvidas no sistema, é igual ao número de graus de liberdade ( $s$ ) do sistema (variáveis livres  $q_j$ ). Em analogia com as coordenadas retangulares, definem-se as velocidades generalizadas  $\dot{q}_j$ , correspondente a cada coordenada generalizada da posição generalizada  $q_j$ .

Para as equações de Lagrange constituírem uma descrição apropriada da dinâmica de partículas, estas devem ser equivalentes (reproduzir, como caso particular) às equações de Newton. No entanto, o Princípio de Hamilton pode ser aplicado a uma faixa ampla de fenômenos físicos, em particular, os que envolvem *campos*, que não são normalmente associados às equações de Newton.

### 5. Considerações Finais

Deve-se enfatizar que a importância da teoria dos campos não se reduz aos campos fundamentais, ou seja, à física de altas energias. Em geral, a teoria clássica dos campos constitui a ferramenta para a descrição de sistemas contínuos, na abordagem das aproximações dos formalismos de Newton, Lagrange e Hamilton. Por exemplo, o escoamento de líquidos e gases, o transporte do calor, estudo de óptica física, os diversos fenômenos associados com processos de mistura e reações químicas entre diferentes



substâncias, o comportamento de plasmas, e assim por diante; ou seja, aplicação em todos os espectros de fenômenos macroscópicos, desde realização de experiências no laboratório até no estudo de meteorologia e astrofísica, tornando-se acessíveis à compreensão através dos conceitos e métodos da teoria de campos.

## 6. Agradecimentos

Agradecemos a CAPES no fomento do Projeto Pibid Física - UFRR.

## Referências

- Arfken, G. e. H. W. (2007). *Física Matemática: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física*. Rio de Janeiro, Ed. Campus - Elsevier, 6.a edition.
- Butkov, E. (1988). *Física Matemática*. Rio de Janeiro, Ed. LTC, 1.a edition.
- Çengel, Y.A e Cimbala, J. (2012). *Mecânica Dos Fluidos â Fundamentos E Aplicações*. Porto Alegre, Ed. Mc Graw Hill, 1.a edition.
- Eisberg, R. e Resnick, R. (1979). *Física Quântica: Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas*. Ed. Campus, Elsevier, 1.a edition.
- Forger, M. e Römer, H. (1993). *Elementare Feldtheorie: Elektrodynamik, Hydrodynamik, Spezielle Relativitätstheorie*. Weinheim - BadenWürttemberg, Alemanha, Ed. VCH, 1.a edition.
- Freedman, Young, S. e. Z. (2009). *Física IV - Óptica e Física Moderna*. São Paulo, SP, Brasil, Ed. Pearson Education do Brasil, 12th edition.
- Goldstein, H., P. C. e. S. J. (2000). *Classical Mechanics*. New York, EUA, Ed. Addison Wesley, 3th edition.
- Kompneyets, A. (1961). *Theoretical Physics*. Moscou, extinta URSS, Ed. Foreign Language Publishing House, 15.a edition.
- Landau, L. e Lifchitz, E. (2004). *Curso de Física - Teoria do Campo*. São Paulo, Ed. Hemus, 1.a edition.
- Machado, K. (2007). *Teoria do Eletromagnetismo*. Paraná, Ed., UEPG, 3.a edition.
- Marion, J.B. e Thornton, S. (2016). *Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas*. São Paulo, Ed. Cengage Learning, 5.a edition.
- Mcquarrie, D. (1976). *Statistical Mechanics*. Nova York, EUA, Ed. Harper & Row, 1.a edition.
- Nussenzveig, H. (1997). Eletromagnetismo. In *Curso de Física Básica, Vol. 3*. São Paulo, Ed. Edgard Blücher, 1.a edition.
- Nussenzveig, H. (2002). *Mecânica*. São Paulo, Ed. Edgard Blücher, 4.a edition.
- Oliveira, M. (2005). *Termodinâmica*. São Paulo, Ed. Livraria da Física, 1.a edition.
- Rocha, J. F., P. L. R. I. P. S. T. R. A. R. F. S. J. O. F. F. A. R. (2015). *Origens e Evolução das Ideias da Física*. Salvador, BA, Brasil, Ed. UFBA, EDUFBA, 2.a ed edition.