



Estudo e Aferição da Qualidade de Ajuste de Modelos Visco Elásticos Distintos em Ensaios Dinâmicos para Materiais Poliméricos com o Software Comercial Office

Bruno Manuel Ribeiro Alves

b.bruno.a@gmail.com

Abstract. *In this work I perform the adjustment of different equations to various data from viscoelastic materials, two cross-linked Polybutadiene polymers of distinctive characteristics and a branched Polyethylene catalyzed by Ziegler-Natta. For this, I choose Excel 2007 software with solver capability available. I concluded that the adjustments with linear or multi-mode models are good approximations for the experimental data related to cross-linked polymers and that fractional models show better results for branched polymers. Thus, Excel software becomes an excellent alternative in model fitting, relative to Wolfram Mathematica, R Statistics and Julia, given the ease of interpreting its language and obtaining comparable results without the need of perform coding.*

Resumo. *Neste trabalho realiza-se o ajuste de equações distintas a dados diversos de materiais viscoelásticos de características distintas. Para tal, escolhe-se o software Excel da suíte Microsoft 365 com complemento solver. Conclui-se que os ajustes com modelos lineares e/ou multimodo aproximam-se dos dados experimentais para os polímeros reticulados e que os modelos fracionários apresentam excelentes resultados para polímeros ramificados. Portanto, o software Excel torna-se uma excelente alternativa no ajuste de modelos, relativamente a softwares como o Wolfram Mathematica, R Statistics e RHEOS Julia, dada a facilidade de interpretação da sua linguagem e a obtenção de resultados similares sem a necessidade de realizar codificação.*

1. Introdução e Revisão Bibliográfica

É a partir da primeira revolução industrial, que se verifica uma transição dos métodos de produção artesanais para métodos de produção automatizados. A partir desse instante, o Homem aperfeiçoou através do potencial da metodologia de tentativa e erro os diversos processos industriais com base na experiência adquirida. Com a segunda revolução industrial, e caminhando em direção a uma era ainda mais digitalizada ocorreram maiores mudanças em nível analógico, mecânico e eletrônico devido a uma proliferação de computadores digitais, o que esteve na origem de muitas mudanças, seja na engenharia, seja no campo social [Cavalcante and da Silva 2011].

O aperfeiçoamento de técnicas como o CAE, ou “Engenharia assistida por computador”, que, em acordo com Kiam and Pereira (2007) é uma ferramenta de trabalho que utiliza o computador como suporte à engenharia e que auxilia o Homem no desenvolvimento de projetos, por meio de análises sustentadas em cálculos numéricos, estando assim na origem de protótipos virtuais dos produtos e dos seus processos de fabrico, permite a simulação do comportamento de materiais em condições reais de utilização [Kiam and Pereira 2007].



A modelação do escoamento de fluidos em condições reais é realizada graças a modelos constitutivos complexos como os modelos viscoelásticos diferenciais e os modelos viscoelásticos integrais, que podem ou não ser multimodo [Pinho 2003]. Os modelos mais simples não permitem reproduzir numa gama mais alargada de comportamento, quando existem macromoléculas na estrutura de tais materiais, como os materiais poliméricos [Pinho 2003].

Atualmente, os softwares mais utilizados para modelação numérica viscoelástica de fluidos, quer comerciais como de distribuição livre são: Star-CD, Ansys Polyflow, OpenFoam, o Wolfram Mathematica (software comercial), o Julia (código aberto) e R Statistics (código aberto), o Octave/ MatLab e o GeoGebra.

O código de Ribeiro Alves (2019) obtido através do software Mathematica é bastante complexo e deriva do código fonte de Normand and al (2012). Nele, Ribeiro Alves (2019) através da introdução a cada passo de dados diferentes para modelos distintos [Normand, Eisenberg and Peleg 2012] consegue com um código introduzir variados conjuntos de dados e três equações do módulo complexo.

O código de Ribeiro Alves (2020) em R Statistics permitiu avanços relativos à descrição estatística do modelo ajustado aos dados experimentais, pois além da qualidade de ajuste ser similar a Mathematica através deste consegue-se um tratamento estatístico dos dados aprofundado.

Outros softwares existem que permitirão responder à questão do ajuste de forma mais ou menos precisa e mais ou menos rigorosa. Por exemplo, em Julia, integra-se um módulo de reologia com os principais modelos fracionários e dependências importantes, que poderá ser consultado em GitHub na página RHEOS Julia.

Os softwares abordados permitem através de codificação a modelação do comportamento complexo de polímeros fundidos. Estes polímeros fundidos apresentam um comportamento complexo, com particularidades que os distinguem dos restantes materiais, como a viscosidade dependente da sua taxa de deformação, as diferenças de tensões normais não nulas, o efeito de Weissenberg, o inchamento e o efeito da retração elástica [Bird, Armstrong and Hassanger 1987]. Os modelos que estes softwares integram têm em conta a complexidade destes materiais e dividem-se em Newtonianos (Power-Law, Bird-Carreau...), não – Newtonianos inelásticos (considera-se a variação da viscosidade de corte com a taxa de deformação) e viscoelásticos (que consideram a existência de um comportamento viscoso e elástico, como o modelo linear clássico de Maxwell) [Pinho 2003].

Estes modelos, no entanto, apenas permitem prever de forma aproximada o comportamento de fluidos complexos e o seu comportamento real, visto a aproximação do meio contínuo assumir uma distribuição homogênea de propriedades que na realidade variam de ponto para ponto, como, por exemplo, a relaxação do fluido, que depende do estado de entrelaçamento entre as moléculas [Pinho 2003]. Por forma a colmatar estas lacunas foram propostos modelos multimodos, resultando assim o valor da tensão induzida de um conjunto de tempos de relaxação, já que estes materiais possuem intrinsecamente um número infinito de modos de relaxação [Chen 2000].

As derivadas de ordem não inteira, que compõem os modelos viscoelásticos de ordem fracionaria, são generalizações da derivada clássica. São definidas através de uma integral, pois devido ao teorema fundamental do cálculo, os dois operadores são

intimamente ligados [Marsden and Weinstein 1986]. Estes operadores permitem descrever de uma forma compacta relações físicas complexas, para as quais os modelos clássicos/ derivadas clássicas não se ajustam adequadamente, sendo a modelação apenas uma das aplicações e com vasta aplicação em praticamente todos os domínios da engenharia tais como entre outros, a engenharia elétrica e a engenharia térmica [Machado, Kyriakova and Mainardi 2011].

Os modelos viscoelásticos fracionários mais conhecidos derivam dos modelos clássicos e são o modelo de Scott Blair (ou modelo de springpot), o modelo de Maxwell fracionário, o modelo fracionário de Kelvin-Voigt e o modelo fracionário de Zener assim como o de Anti-Zener [Mainardi 2010]. Outros modelos existem, como por exemplo, o modelo standard de ordem fracionária para sólidos e o modelo standard de ordem fracionária para fluidos [Freed, Diethelm and Luchko 2002].

Os primeiros modelos lineares a serem desenvolvidos foram o modelo de Hooke (que se aplica a sólidos e é formulado para casos de estiramento longitudinal) e o modelo de Newton que se aplica a fluidos puramente viscosos [Mainardi 2010]. O modelo linear de Hooke equivale ao modelo de sólido ideal e representa-se mecanicamente por uma mola (parâmetro G) [Mainardi 2010]. A mola representa um corpo perfeitamente elástico e $G(t)$ e $J(t)$ são constantes [Mainardi 2010]. O modelo linear de Newton tem um elemento dissipativo contendo um parâmetro, sendo bastante útil na modelação do comportamento de líquidos perfeitos [Mainardi 2010].



Figure 1. Elemento mecânico de Hooke (mola)

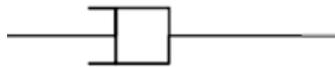


Figure 2. Elemento mecânico de Newton (pistão)

O modelo que apresenta respostas interpoladas com comportamentos intermédios entre o de Hooke e o de Newton, com casos limites possíveis de englobar os comportamentos de Hooke e de Newton é o modelo de Scott Blair (ou modelo de Spring-Pot) [Mainardi 2010]. Contém um parâmetro $b > 0$ que corresponde a uma quase propriedade e uma ordem fracionária (α) compreendida entre 0 e 1. Para valores de $\alpha=0$ resulta no modelo de Hooke e para valores de $\alpha = 1$ resulta em modelo de Newton [Mainardi 2010].

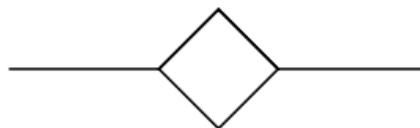


Figure 3. Elemento mecânico de Scott Blair (springpot)

O modelo de Maxwell diferencial clássico linear é constituído por uma associação em séries de um elemento mecânico de Hooke e um elemento mecânico de Newton, resultando no elemento da figura 4 [Macosko 1994].



Figure 4. Elemento mecânico de Maxwell (mola - amortecedor)

O modelo de Maxwell fracionário generalizado apresenta por sua vez dois elementos mecânicos de ScottBlair (spring-Pot) associados em série. Contém quatro parâmetros, dos quais duas quasi-propriedades (C_α e C_β) e dois parâmetros de ordem fracionária α e β , com $C_\alpha > 0$, $C_\beta > 0$ e $[\alpha, \beta] = [0; 1]$, quer isto dizer que α e β está compreendida entre zero (0) e um (1) [Jaishankar and McKinley 2012].

2. A ferramenta Excel

Neste trabalho, a importância de utilizar uma ferramenta bem conhecida de toda a comunidade científica é realçada. Trata-se do software Excel, que existe acoplado à ferramenta de trabalho Microsoft 365.

O ajuste realiza-se através da introdução numa folha de cálculo dos dados experimentais de frequência angular (ω), módulo de armazenamento ($G'(\omega)$) e módulo de perda ($G''(\omega)$). O valor de $G'(\omega)$ e de $G''(\omega)$ ajustado são obtidos através da escrita em células separadas das suas funções correspondentes, cujos parâmetros serão introduzidos posteriormente, com a finalidade de obter os valores finais. Realiza-se a diferença entre ($G'(\omega)$) experimental e ($G'(\omega)$) ajustado e eleva-se a diferença ao quadrado. No final é realizada a soma desta diferença ao quadrado com a finalidade de obter um valor mínimo.

Posteriormente realiza-se um gráfico de dispersão e introduz-se os dados correspondentes, afinando-se o ajuste com o complemento solver de Excel (ver Figura 5).

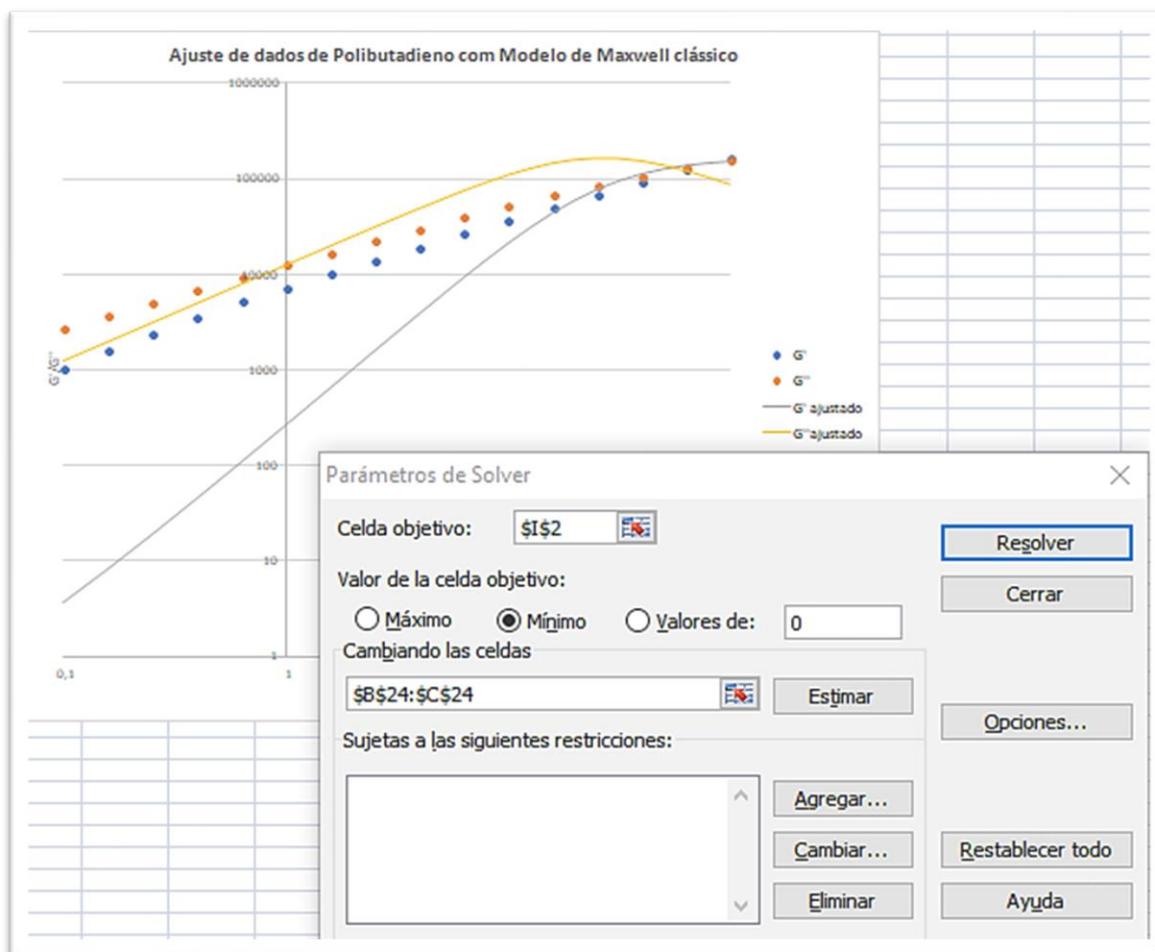


Figura 5. Gráfico de dispersão dos dados pronto a ser ajustado com o complemento de parâmetros solver

3. Materiais Poliméricos

Os materiais utilizados neste trabalho são de natureza polimérica. São materiais macromoleculares constituídos por um novelo de cadeias. A definição de polímeros em acordo com o dicionário Larousse corresponde a Poli (“muitas”) e meros (“unidades”), ou seja, muitas unidades repetitivas de átomos ou de moléculas de grande peso molecular, assemelhando-se no seu todo na perspectiva do condutor do projeto a um comboio com as suas carruagens atreladas.

Serão alvo neste estudo o LLDPE (C_2H_4)_n sintetizado via diferentes catalizadores que originarão ramificações curtas e longas e disponível em Doerpinghaus (2002) e o PoliButadieno, uma borracha ($CH_2-CH-CH=CH_2$)_n [Macosko 1994].

Os materiais à base de Polietileno são resinas virgens testadas a 150°C em ensaios dinâmicos oscilatórios. Usaram-se dados de Equistar Petrothene NA 952-00 (LDPE catalisada via catalisadores peróxidos), da resina Exxon Mobil NTX 101 (LLDPE catalisada via catalisadores Ziegler-Natta), da resina Exxon Mobil Exact 0201 (LDPE catalisada via metalocenos), da resina Exxon Mobil Exact 3132 (LLDPE catalisada via metalocenos), da resina Dow Affinity PL1840 (constituída por diferentes dispersões de

Mw de LLDPE catalisada por metallocenos) e finalmente por Dow Affinity PL 1880 (constituída por diferentes dispersões de Mw de LLDPE catalisada por metallocenos).

4. Teste da ferramenta Excel

A realização deste projeto levou à comparação da ferramenta office com os dados de Doeringhaus ajustados com o modelo standard de ordem viscoelástica fracionária [Alves 2019]. Os resultados obtidos são similares, como se pode observar pelo gráfico de ajuste.

A figura 6 apresenta o teste realizado.

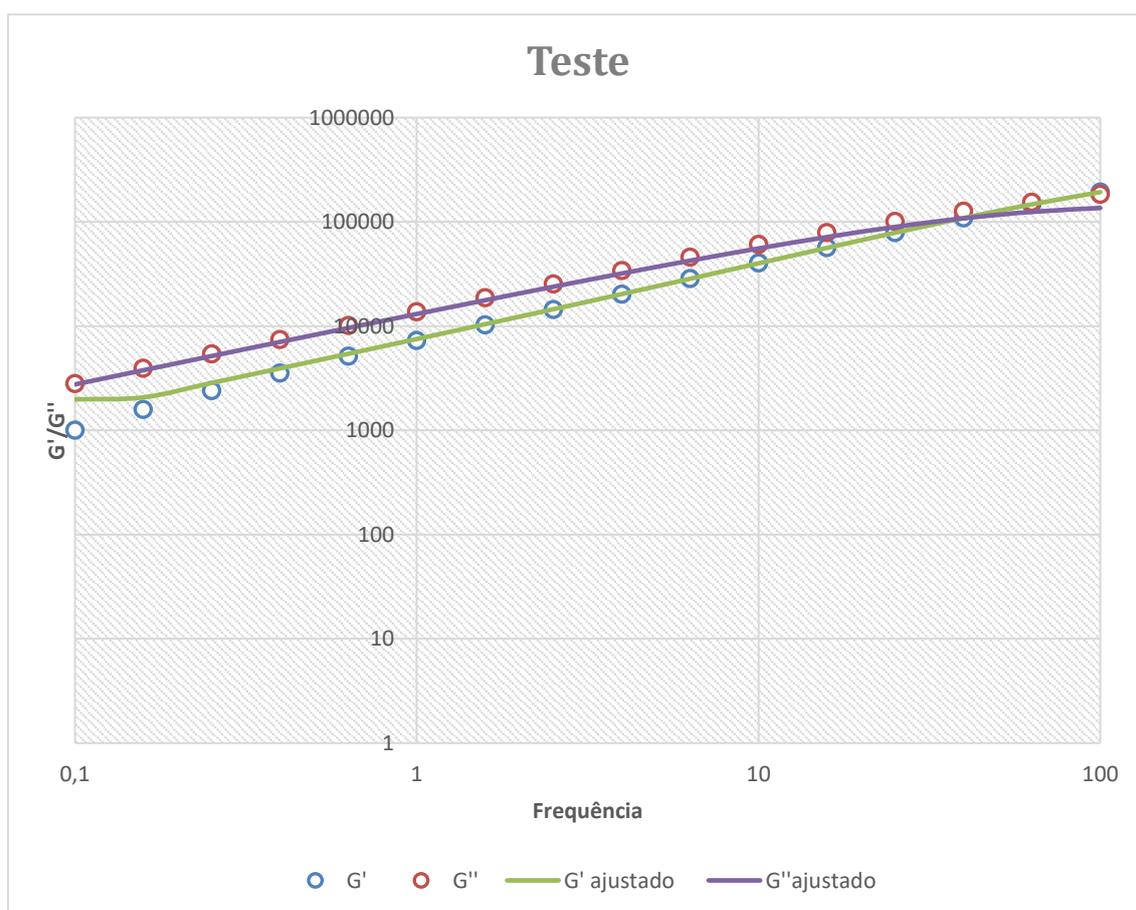


Figure 6. Teste realizado com a ferramenta Excel para o modelo de Maxwell fracionário e a resina Dow Affinity PL 1880

Os valores do teste realizado relativos aos parâmetros apresentam-se na tabela 1.

Tabela 1. Resultado do ajuste teste para a resina Dow Affinity PL 1880 com o modelo de Maxwell fracionário

η	τ	α	Parâmetros
3211.024	0.006909	0.686043	DOW AFFINITY PL 1880



O software Excel permite a realização de ajustes e a descrição dos resultados estatísticos, tal como observado na tabela 2.

Tabela 2. Descrição estatística dos resultados de ajuste obtidos para a resina Dow Affinity PL 1880 com o modelo de Maxwell fracionário

<i>G' ajustado</i>		<i>G'' ajustado</i>	
Média	45090,51897	Média	46417,69803
Erro-tipo	14550,66518	Erro-tipo	11458,68656
Mediana	17410,29727	Mediana	27923,26337
Moda	#N/A	Moda	#N/A
Desvio-Padrão	58202,66074	Desvio-padrão	45834,74625
Variância	3387549717	Variância de amostra	2100823964
Coeficiente de Kurtosis	1,703696978	Coeficiente de Kurtosis	-0,63226182
Coeficiente de assimetria	1,576554719	Coeficiente de assimetria	0,878536132
Intervalo de dados	190843,0194	Intervalo de dados	133099,6948
Mínimo	1983,988615	Mínimo	2759,964736
Máximo	192827,008	Máximo	135859,6596
Soma	721448,3035	Soma	742683,1685
Intervalo de confiança (95,0%)	31014,00869	Intervalo de confiança (95,0%)	24423,61227

Relativamente ao erro relativo deste ajuste comparativamente a Ribeiro Alves obtiveram-se os seguintes valores que estão representados na tabela 3.

Tabela 3. Valores de erro relativo e comparação de ribeiro Alves com exercício teste

η	τ	a	Parâmetros
3217	0.007	0.686	Alves (2019)
3211	0.0069	0.686	Exercício Teste
0.19	1.42	0	Erro relativo (%)

Os valores de erro relativo são ótimos o que permite garantir a exatidão e a precisão dos resultados.

5. Realização de ajustes de Materiais Poliméricos em SAOS com Excel

Os ajustes obtidos neste trabalho podem ser observados nas figuras 7-12, para o material polimérico PoliButadieno e diferentes polímeros comerciais de Polietileno, nomeadamente (EP NA 952-00; EM NTX 101; EM Exact 0201).

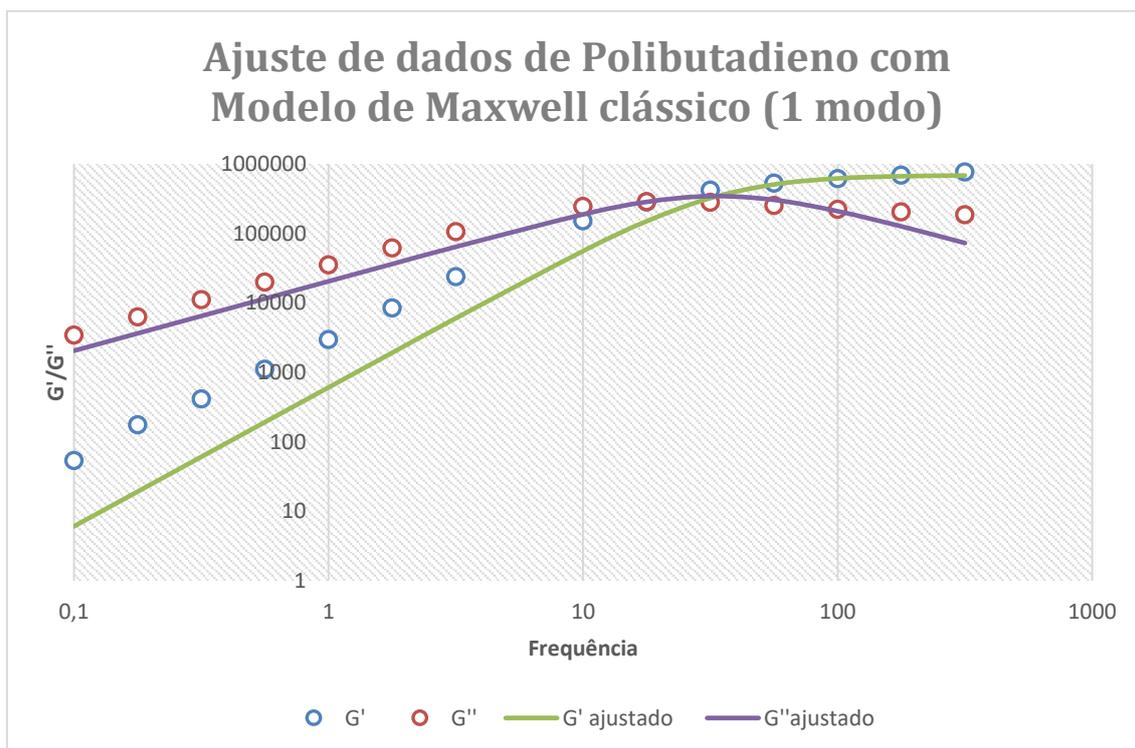


Figura 7. Ajuste realizado com o modelo de Maxwell linear clássico para o material polimérico PoliButadieno em SAOS (ensaios dinâmicos oscilatórios de pequena amplitude) **A**

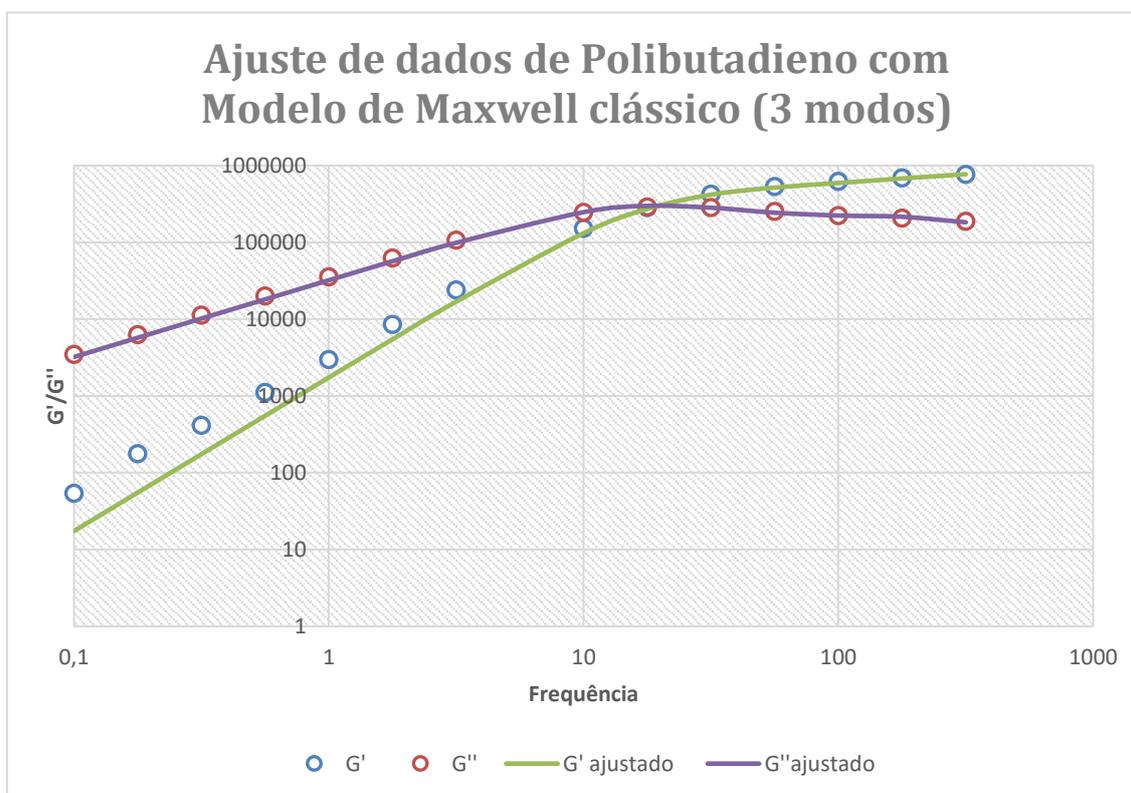


Figura 8. Ajuste realizado com o modelo de Maxwell linear clássico multimodo (3 modos de relaxação) para o material polimérico PoliButadieno em SAOS (ensaios dinâmicos oscilatórios de pequena amplitude) **B**

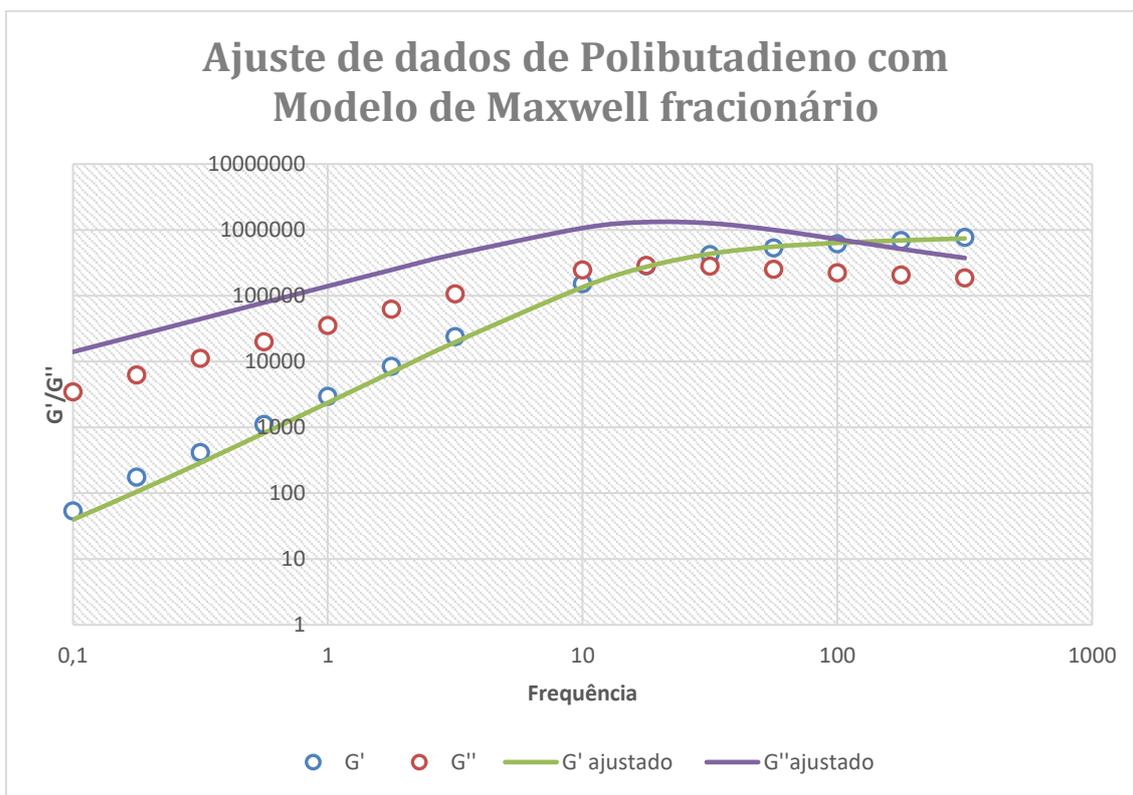


Figura 9. Ajuste realizado com o modelo de Maxwell fracionário para o material polimérico PoliButadieno em SAOS (ensaios dinâmicos oscilatórios de pequena amplitude) **C**

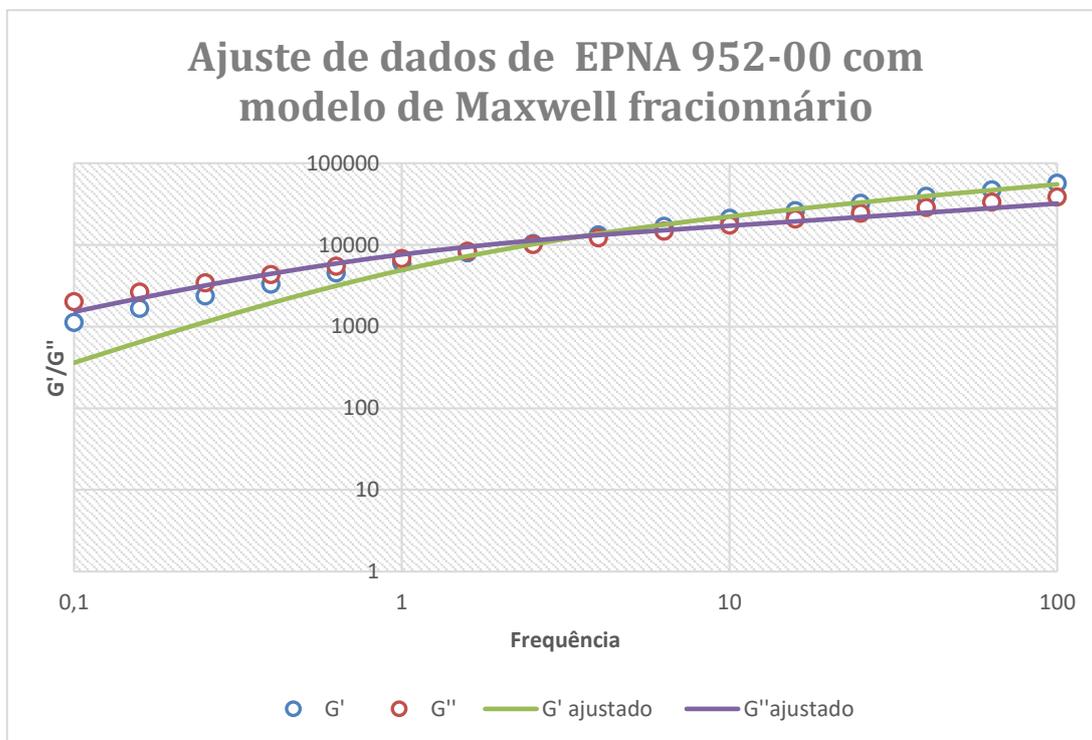


Figura 10. Ajuste realizado com o modelo de Maxwell fracionário para o material polimérico EPNA 952-00 em SAOS a 150°C (ensaios dinâmicos oscilatórios de pequena amplitude) **D**

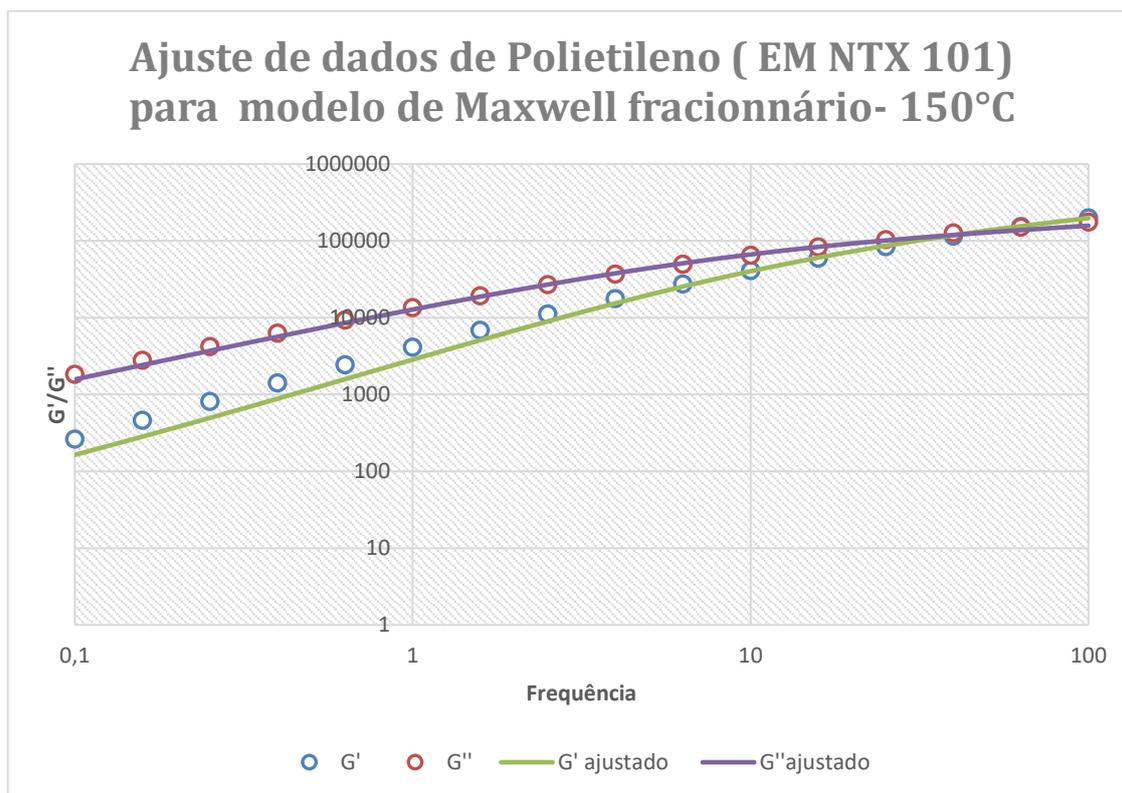


Figura 11. Ajuste realizado com o modelo de Maxwell fracionário para o material polimérico EM NTX 101 em SAOS a 150°C (ensaios dinâmicos oscilatórios de pequena amplitude) **E**

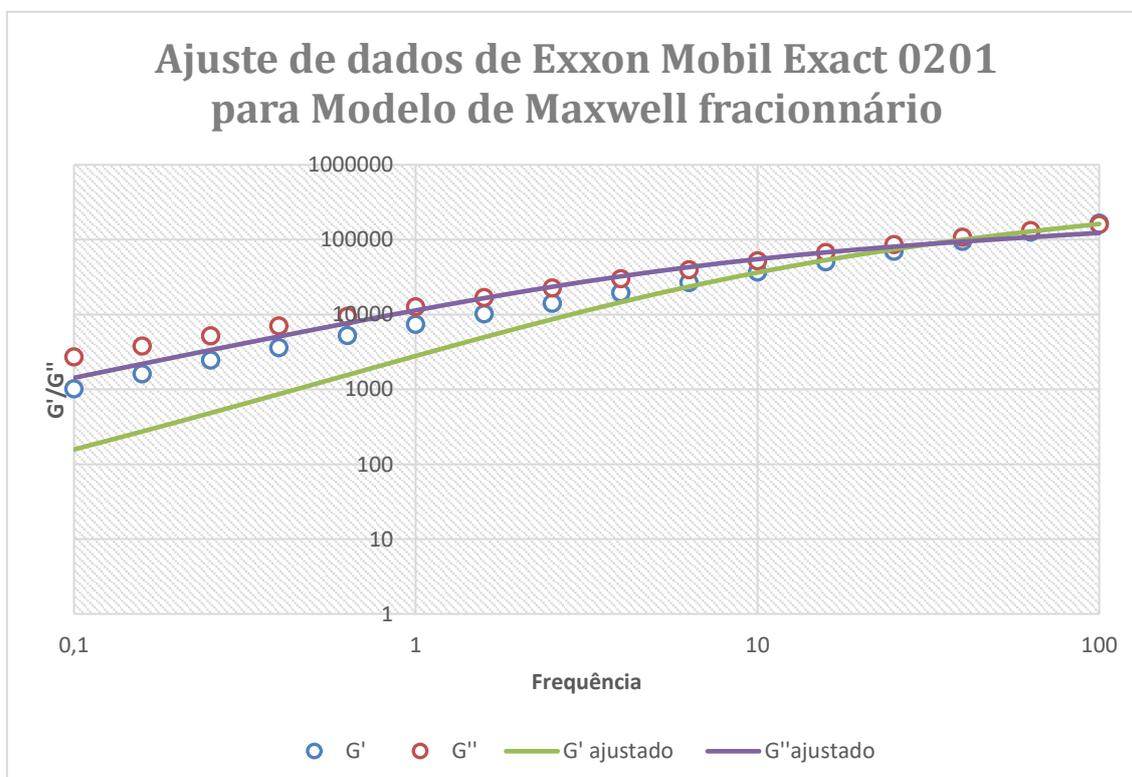


Figura 11. Ajuste realizado com o modelo de Maxwell fracionário para o material polimérico Exxon Mobil Exact 0201 em SAOS a 150°C (ensaios dinâmicos oscilatórios de pequena amplitude) **F**



Os resultados para os valores dos parâmetros obtidos apresentam-se de seguida para cada ajuste (representado pela letra correspondente A-F) nas tabelas 4-6.

Tabela 4. Resultado do ajuste realizado com o modelo de Maxwell linear clássico para o material polimérico PoliButadieno em SAOS (ensaios dinâmicos oscilatórios de pequena amplitude) **A**

Parâmetros	Modelo de Maxwell (1 modo) A	
	G	τ
	690984,36	0.0296299

Tabela 5. Resultado do ajuste realizado com o modelo de Maxwell linear clássico multimodo (3 modos de relaxação) para o material polimérico PoliButadieno em SAOS (ensaios dinâmicos oscilatórios de pequena amplitude) **B**

Parâmetros	Modelo de Maxwell (3 modos)					
	G ₁	τ_1	G ₂	τ_2	G ₃	τ_3
	43010.74	0.017302	310844	0.00451	522501	0.05746

Tabela 6. Resultado do ajuste realizado com o modelo de Maxwell fracionário para os materiais poliméricos C-F em SAOS (ensaios dinâmicos oscilatórios de pequena amplitude)

Cb	Ca	a	b	Parâmetros
8549308	139979.9	1	0.0999999	Material polimérico C
15716.78	15946.86	0.309	0.958	Material polimérico D
14614.4	73273.86	0.309	0.958	Material polimérico E
13330	57479.12	0.309	0.958	Material polimérico F

6. Discussão de resultados

Discutiremos os resultados obtidos para os ajustes com o modelo de Maxwell linear diferencial clássico e os resultados para todos os materiais poliméricos estudados.

Para o material polimérico PoliButadieno, ao ser observado o gráfico no seu todo, nota-se que o ponto de cruzamento de G' com G'' coincide com os dados experimentais. Assim, acima do ponto de crossover G' ajustado existe coincidência com os pontos experimentais e abaixo do ponto de crossover G'' ajustado quase que existe coincidência com os valores experimentais. Os restantes dados ajustados de G' e G'' estão fora de fase relativamente aos valores experimentais.

No que diz respeito aos pontos experimentais do PoliButadieno, o ajuste com três (3) modos do modelo de Maxwell linear diferencial clássico o ajuste é extremamente bom. Ou seja, os dados ajustados são coincidentes com os pontos experimentais em todo



o domínio das funções G' e G'' , mas o número de parâmetros utilizado é seis (6). Observa-se, que, para valores de frequência inferiores a 10 existe uma não coincidência dos dados pois os pontos simplesmente não ajustam nesta região do domínio da equação. Relativamente ao ponto de crossover este é definido em concordância com os dados experimentais.

O primeiro ajuste com o modelo fracionário de Maxwell para o polímero de PoliButadieno relativamente a outros trabalhos como em Alves (2019) e Jaishankar and McKinley (2012), nota-se que G' segue a tendência dos dados experimentais e ajusta. No entanto, G'' embora tenha uma tendência similar aos dados experimentais o ajuste não é realizado pois G' ajustado aparenta ser pela observação gráfica múltiplo destes valores experimentais.

Quanto aos diferentes Polietilenos ramificados catalisados distintamente, aborda-se primeiramente o Equistar Petrothene NA 952-00 catalisado via peróxidos. Este ajuste é coincidente com os dados experimentais para o modelo de Maxwell fracionário e o ponto de crossover é bem identificado e coincidente com os dados experimentais.

O material polimérico a ser discutido nesta etapa é o Exxon Mobil NTX, uma resina comercial, que possui G'' ajustado e G' ajustado praticamente coincidentes em todo o domínio da função de ajuste. O ponto de crossover é bem identificado relativamente aos dados experimentais e coincidente.

A resina comercial Exxon Mobil Exact 0201 é coincidente nos instantes finais de frequência, G' e de G'' , ou seja, para valores de frequência superiores a 10, ao passo que no restante domínio da função é não coincidente com os dados experimentais. Mais uma vez, o ponto de crossover foi bem identificado com o modelo de Maxwell fracionário.

A descrição da forma como se desenrola o ajuste permite a constatação que polímeros reticulados ajustam melhor com modelo multimodo. Por sua vez os polímeros ramificados (sem reticulações) ajustam bem com o modelo de Maxwell fracionário.

No decorrer deste projeto verificou-se ainda na prática, no decorrer de diferentes testes de ajuste, a qualidade de ajuste é influenciada pelo número total de parâmetros, sendo previsto que quanto menor o número de parâmetros menor será a qualidade de ajuste, embora possam existir certas exceções. Por conseguinte, o aumento do número de parâmetros alcança na prática um aumento da capacidade de ajuste, o que está associado a um maior número de parâmetros. Observações práticas revelam que modelos fracionários de sólidos e líquidos aparentam possuir um significado físico para dados de relaxação, fluência e modulo complexo de materiais sólidos e líquidos. Já o recíproco não é observado.

Era previsto tendo em consideração resultados anteriores como o de Alves (2019), Alves (2020), que os modelos diferenciais fracionários viscoelásticos fossem mais efetivos. Já no caso de Jaishankar and McKinley (2012) cujos resultados são promissores para o comportamento de materiais Power-Law, não foi verificado neste projeto.

7. Conclusão

No final deste estudo, conclui-se que o software office é uma alternativa viável e rigorosa com o complemento solver instalado, a outros softwares apropriados a este propósito,



como o RHEOS Julia. Assim fica provado neste projeto que a utilização de um solver baseado na metodologia tentativa e erro que permite no final a afinação dos resultados melhora apreciavelmente mesmo os resultados de Macosko, que passam de quatro (4) para três (3) tempos de relaxação.

Não é, pois, mais necessário a utilização de softwares dispendiosos e ter a necessidade do conhecimento de codificação.

Ainda que exista na opinião do autor uma elevada sensibilidade na realização dos ajustes nas situações evocadas fica provado que os modelos viscoelásticos fracionários não são resposta adequada a todas as situações encontradas na literatura, como é o caso de materiais reticulados. Ao invés, funcionam para materiais ramificados de Polietileno.

O autor pensa que os modelos fracionários viscoelásticos num futuro bastante próximo possam ser aplicados numa área mais abrangente de forma a que todos possamos nos beneficiar com a aplicação destes modelos e que talvez a não existência de uma generalização destes modelos seja um parâmetro limitante neste estudo.

Desta forma, os modelos fracionários têm aplicação prática a diversas situações como demonstrado por diversos autores, no entanto ajustes multimodo tendo como base a existência dos diversos tempos de relaxação num material polimérico são uma excelente alternativa no momento atual de investigação científica.

8. Bibliografia

- Alves, B.M.R. (2019), “Modeling Insite[®] Technology Ethylene α -olefin Resins with standard FOV fluid in 1D”, Journal of King Saud University: Engineering Sciences, v.31, n^o2, p.157-163,
- Alves, B.M.R. (2020), “Modelização viscoelástica Fracionária do comportamento em relaxação da resina polimérica de ABS com software R”, RCT: Revista de Ciência e Tecnologia, v.6, p.9.
- Bird, B.R., Armstrong, R.C., Hassanger, O., (1987) “Dynamics of polymeric liquids, volume 1-Fluid mechanics”, second edition, Wiley Interscience, New York.
- Cavalcante, Z.D., da Silva, M.L.S. (2011), “A importância da revolução industrial no mundo da tecnologia”, In VII EPCC: Encontro internacional de Produção científica, Anais eletrônicos, CESUMAR – Centro Universitário de Maringá, editora CESUMAR, Maringá-Paraná, Brasil.
- Chen, T., (2000), “Determining a Prony series for a Viscoelastic material from time varying strain data”, US Army Research Laboratory – Vehicle technology directorate, Nasa/ TM-2000-210123 ARL-TR-2206, Langley research center, Hampton, Virginia.
- de Pinho, F.M.C.T. (2003), “Cálculo de escoamento de fluidos não-Newtonianos em regime laminar – Desenvolvimento e aplicações recentes da metodologia de volumes finitos “, Lição de síntese apresentada para as provas de agregação, Universidade do Porto, Porto, Portugal.
- Doerpinghaus, P.J. (2002) “Flow Behavior of Sparsely Branched metallocene catalyzed Polyethylene’s”, Faculty of the Virginia Polytechnic institute and State University, Thesis for obtention of Doctor of Philosophy degree.



- Freed, A., Diethelm, K., Luchko. (2002), "Fractional Order viscoelasticity (FOV): Constitutive development using the fractional calculus: First annual report", NASA.
- Jaishankar, A., McKinley, G.H., (2012) "Power-Law rheology in the bulk and at the interface: quasi-properties and fractional constitutive equations" Royal Society of Chemistry. doi:10.1098/rspa.2012.0284
- Kiam, T.M., Pereira, N.C. (2007), "Estudo de caso de peça moldada pelo processo de injeção-compressão para termoplásticos utilizando análise computacional", Polímeros: Ciência e tecnologia, vol:17, nº1, p.16-22, 2007.
- Machado, J.T., Kyriakova., Mainardi, F, (2011) "Recent history of fractional calculus", Communications of nonlinear science and numerical simulation, vol sixteen, p.1140-1153.
- Macosko. (1994), "Rheology : Principles, Measurements and Applications", John Wiley & Sons, New York.
- Mainardi, F. (2010), "Fractional Calculus and Waves in linear viscoelasticity – An introduction to mathematical models", Imperial college Press, Italy.
- Marsden, J., Weinstein, A. (1986), "Calculus I", 2nd edition, Springer, New York.
- Normand, D.M., Eisenberg, M. and Peleg, M. (2012), "Choosing initial parameter values for non linear regression", (<http://demonstrations.wolfram.com/ChoosingInitialParametersValueForNonlinearRegression>), Wolfram Demonstration Project.