



Influência da Correção de Ladenburg para Movimentos Oscilatórios Amortecidos em Meios Viscosos por Meio de um Experimento de Baixo Custo

Augusto C. L. Moreira¹, Sérgio L. Campello¹, Rodrigo P. Holanda², Erick C. Silva²

¹Núcleo Interdisciplinar em Ciências Exatas e da Natureza – Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

²Discente do Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF) – Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Av. Marielle Franco, s/n - Km 59 - Nova, PE, 55014-900, Brasil.

{aclm.ufpe, rodrigoholanda}@gmail.com, {slcampello, erikfisica}@yahoo.com.br

Resumo: Este trabalho apresenta um modelo teórico e um estudo experimental sobre oscilações amortecidas, realizado através de um sistema oscilador não convencional, com a utilização de materiais de baixo custo e de fácil aquisição, contendo uma esfera metálica maciça, oscilando em um tubo transparente, aberto nas extremidades e levemente curvado, com três fluidos diferentes: ar, água e óleo de motor automotivo. O processo de obtenção dos dados foi realizado através de vídeo-análise, valendo-se do software Tracker. Os resultados obtidos possibilitaram constatar sua semelhança com o modelo teórico, com a correção de Ladenburg para oscilações amortecidas em regime supercrítico (esfera em óleo) e em regime subcrítico (esfera no ar e na água).

Abstract: This work presents an experimental study about damped oscillations in an unconventional oscillator system conditioned to the use of low cost and easily acquired materials. This experimental arrangement consisted of a massive metal sphere oscillating in a transparent tube, open at both ends and slightly curved. This allowed us to test the damping of the oscillations of this sphere inside the tube, immersed in three different fluids: air, water and automotive engine oil. The process of obtaining the data was carried out through video analysis using the Tracker software. The results obtained made it possible to verify its similarity with the theoretical model with Ladenburg's correction for damped oscillations in supercritical regime (sphere in oil) and in subcritical regime (sphere in air and water).



1. Introdução

Em cursos universitários de Física básica é bastante comum o estudo de modelos teóricos idealizados, tais como o pêndulo simples sem resistência do ar e sistemas massa-mola sem atrito. Nesses exemplos, as expressões matemáticas oriundas desses modelos teóricos, descrevem situações onde o movimento oscilatório, por estarem livres de forças dissipativas, recai em um movimento harmônico simples que, ao menos teoricamente, permanece por tempo indeterminado. Não obstante, com o intuito de ilustrar tais modelos teóricos, há uma farta literatura envolvendo experimentos controlados, provendo dados empíricos em boa concordância (dentro de uma margem de erro aceitável) com as expressões matemáticas outrora obtidas por meio destes modelos teóricos [A. A. Garcia 2009; Peruzzo 2012; Jesus 2014]. Entretanto, quando um sistema oscilatório está sujeito à ação de forças externas dissipativas, seu movimento reduz-se gradativamente sendo, neste caso, denominado movimento oscilatório amortecido. Além disso, a depender dos parâmetros envolvidos no modelo teórico – viscosidade do meio, por exemplo – tal amortecimento pode ainda ser classificado [Nussenzveig 2002] em: crítico, subcrítico e supercrítico. Se por um lado existe na literatura [Greiner 2004; Stephen T. Thornton 2008] diversos modelos teóricos envolvendo o estudo de oscilações amortecidas e suas classificações, o mesmo não se pode afirmar [A. A. Garcia 2009; Peruzzo 2012; Jesus 2014] acerca das atividades experimentais abordando esse tema.

Este trabalho consiste em uma proposta de atividade experimental envolvendo um sistema oscilatório amortecido pouco usual que, juntamente com o desenvolvimento de um modelo teórico pormenorizado, leva em conta correções e forças pouco abordadas na literatura [Nussenzveig 2002; Stephen T. Thornton 2008] possibilitando ao estudante se deparar tanto com os diferentes regimes de amortecimento (subcrítico, crítico e super crítico) quanto com as variáveis relevantes para a formulação teórica envolvendo um experimento aparentemente simples. Assim, enquanto a atividade experimental possibilita medir e comparar diferentes situações, o modelo teórico permite analisar quais fatores podem ser desprezados e quais são imprescindíveis para se descrever tais sistemas. Tal fato possibilita uma forte correlação entre teoria e experimento de modo que, apesar do aparato experimental ser dado, a interpretação dos dados obtidos com os mesmos são teórico-dependentes e, conseqüentemente, deixa a atividade experimental muito mais próxima de uma atividade científica real, contribuindo assim, para a discussão envolvendo modelos teóricos e realidade. No que tange esse último aspecto (correlação entre teoria e experimento), veremos que a inserção da correção de Ladenburg no modelo teórico é fundamental para que o mesmo possa descrever, com razoável precisão, os dados experimentais.

No que segue, o trabalho está estruturado da seguinte forma: na seção 2.1 será descrito um possível modelo teórico analiticamente solúvel, discutindo as forças relevantes, aproximações e correções. A solução analítica deste modelo será apresentada e discutida na seção 2.2. e na seção 3 será descrita a atividade experimental (materiais e métodos), ficando os resultados obtidos com o modelo teórico, os dados empíricos e a correlação entre ambos na seção 4. Por fim, as considerações finais serão apresentadas na seção 5.

2. O sistema e um modelo teórico

2.1 Formulação do modelo teórico

O sistema proposto consiste em um tubo semicircular contendo um fluido homogêneo em seu interior (ar, água ou óleo) por onde uma esfera metálica maciça, imersa, oscila amortecidamente em torno do ponto de equilíbrio ($x = 0$), conforme mostra a figura 1.

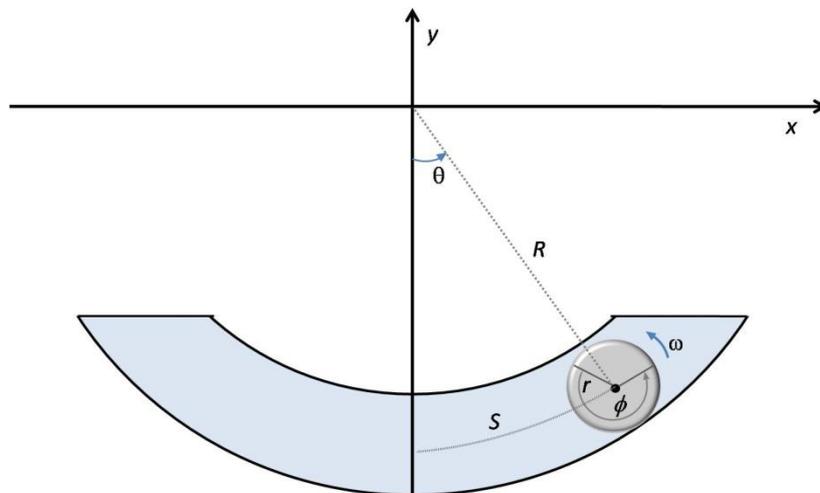


Figura 1. Esfera de raio r rolando sem escorregar com velocidade angular ω , em um tubo semicircular. A distância entre o centro do círculo e o centro de massa da esfera é R .

O sistema em questão é análogo à oscilação de um pêndulo com amortecimento, mas com um fator adicional: a esfera rola dentro de um tubo contendo um fluido com uma das dimensões – o raio da seção transversal do tubo – possuindo a mesma ordem de grandeza da esfera. Considerando que a esfera rola sem escorregar, a equação diferencial que descreve o sistema pode ser obtida de várias formas [Lemos 2007], sendo que neste trabalho, utilizaremos apenas a formulação Newtoniana [Stephen T. Thornton 2008].

Para a formulação Newtoniana, serão consideradas todas as forças que atuam na esfera girando no sentido horário (descendo o tubo), conforme mostra a Figura 2. Adiante, veremos quais dessas são de fato relevantes para uma boa descrição do sistema.

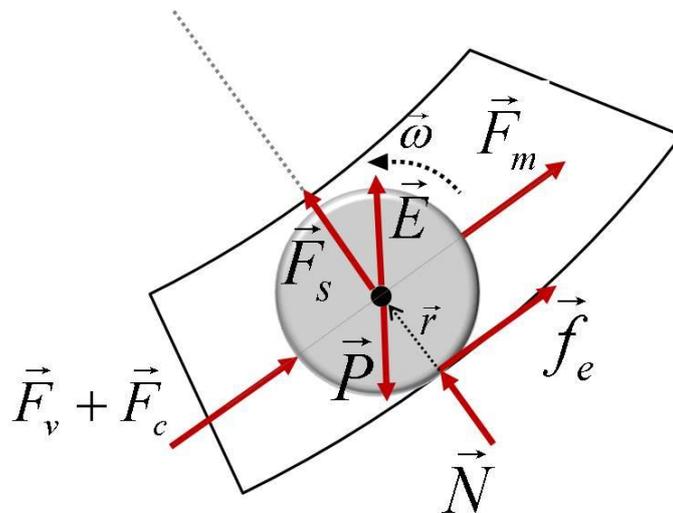


Figura 2. Forças atuando na esfera, rolando no sentido horário, e descendo o tubo.

As forças que atuam na esfera são: Atrito estático (\vec{f}_e); Peso (\vec{P}); Empuxo (\vec{E}); Força de contato (\vec{N}); Força de Arrasto (\vec{F}_v); Força de Sustentação (\vec{F}_s); Força de inércia da Massa do fluido adicionada à esfera (\vec{F}_m) e a Força de Colisão (\vec{F}_c). Como as quatro primeiras (\vec{f}_e , \vec{P} , \vec{E} e \vec{N}) que atuam na esfera, conforme mostra o diagrama de forças da figura 2 que é familiares aos alunos, serão discutidas apenas as quatro últimas.

A *força de arrasto*, como o próprio nome sugere, constitui uma das forças de resistência do fluido à passagem da esfera, provocando o amortecimento desta pelo fluido ao rolar no tubo. A expressão da força de arrasto é dada por [Robert A. Nelson 1985]:

$$\vec{F}_v = -\frac{1}{2} C_d A \rho_f v \vec{v} \quad . \quad (1)$$

Na equação (1), v é o módulo da velocidade da esfera em m/s, ρ_f a densidade do fluido em kg/m³, A é a área de contato do corpo com o fluido em m² e C_d é um coeficiente adimensional que depende do número de Reynolds. O número de Reynolds (R_e) pode ser interpretado como um confronto entre forças de inércia e forças viscosas [Cattani 2005], sendo dado por:

$$R_e = \frac{\rho_f v r}{\eta} \quad , \quad (2)$$

onde ρ_f , v , r e η são, respectivamente: a densidade do fluido em g/cm³, módulo da velocidade da esfera em cm/s, um comprimento característico (neste caso o raio da

esfera) em centímetros (cm) e a viscosidade dinâmica em g/cm.s . De modo geral, uma expressão analítica para C_d é de difícil obtenção, sendo muitas vezes utilizadas expressões empíricas [K. Y. Yick 2009; Román Martino 2015]. Adotaremos, neste trabalho, a fórmula empírica obtida por Yick e colaboradores [K. Y. Yick 2009], válida com boa precisão (com erros inferiores a 10%) para número de Reynolds compreendidos entre $0 < Re < 2 \times 10^5$, a saber:

$$C_d = \frac{12}{R_e} + \frac{6}{1 + \sqrt{2R_e}} + 0,4 \quad . \quad (3)$$

Para pequenos valores do número de Reynolds ($Re < 0,1$), o primeiro termo na equação (3) domina a expressão para C_d . Neste caso, as forças viscosas predominam no processo de resistência do fluido na esfera. A força de arrasto, neste caso, é proporcional à velocidade e pode ser obtida substituindo o termo $12/R_e$ na equação (1), resultando na lei de Stokes: $\vec{F}_v = \vec{F}_{stokes} = -6\pi\eta r \vec{v}$.

Se, contudo, o número de Reynolds for alto ($Re > 10^3$) os dois primeiros termos na Equação (3) tornam-se desprezíveis, favorecendo as forças de inércia. Nesta situação, a força de arrasto passa a ser proporcional ao quadrado da velocidade, na medida em que apenas o último termo (constante) contribui de forma efetiva na equação (3). O termo intermediário na equação (3) corresponde a um termo de transição entre pequenos números de Reynolds ($Re < 0,1$) e altos números de Reynolds ($Re > 10^3$).

Cabe salientar que a equação (1), juntamente com C_d dado pela equação (3), faz com que a equação diferencial que descreve o movimento da esfera no fluido tenha termos não-lineares, de modo a inviabilizar uma solução analítica. Todavia, como será visto adiante, com boa aproximação, pode-se linearizar a equação diferencial substituindo os termos não lineares pela velocidade média da esfera em cada situação (ar, água e óleo). Para isso, nota-se que C_d pode ser escrito como:

$$C_d = \frac{12}{R_e} \left(1 + \frac{R_e}{2 + 2\sqrt{2R_e}} + \frac{R_e}{30} \right) = \frac{12}{R_e} (1 + \Lambda(R_e)) \quad , \quad (4)$$

onde $\Lambda(R_e)$ é uma função de R_e (conseqüentemente da velocidade) que contém todos os termos não-lineares. A linearização consiste, então, em substituir $\Lambda(R_e)$ por seu valor médio, ou seja, $\Lambda(R_e) \rightarrow \langle \Lambda \rangle$. Procedendo desta forma, a força \vec{F}_v passa a ser dada pela equação (5), que é linear na velocidade:

$$\vec{F}_v = -6\pi\eta r \vec{v} (1 + \langle \Lambda \rangle) \quad . \quad (5)$$

A *força de colisão* (\vec{F}_c) está relacionada ao fato da superfície interna do tubo, por onde a esfera rola, não ser completamente regular. Ao curvar o tubo para deixá-lo no formato de um segmento de arco circular, surgem rugosidades no interior do mesmo. Colisões, com essas rugosidades, atuam de forma significativa quando no movimento da esfera não podem ser desprezadas, devendo constituir uma força contrária à direção do movimento da esfera, e fortemente dependente, tanto da velocidade quanto do raio da esfera. Uma expressão para essa força [Jan and Chen 1997], é dada, por:

$$\vec{F}_c = -C \frac{2\pi}{3} r^2 \rho_e v \vec{v} \quad , \quad (6)$$

onde C é um parâmetro (a ser fenomenologicamente ajustado) chamado coeficiente de colisões. Vale ressaltar que, assim como no caso da força viscosa, o termo de colisão, é não-linear, e para se ter uma expressão analítica, deve-se linearizá-la. Para tal, utiliza-se a seguinte aproximação: $(rv)^2 \sim rv \langle rv \rangle = rv \rho_f^{-1} \eta \langle \text{Re} \rangle$, de modo que a equação (6) pode ser reescrita, como:

$$\vec{F}_c = -C \frac{2\pi \rho_e r}{3} \left(\frac{\eta \langle \text{Re} \rangle}{\rho_f} \right) \vec{v} \quad . \quad (7)$$

A *força de massa adicional* (\vec{F}_m) está relacionada ao seguinte fato: quando a esfera rola sem escorregar dentro do tubo, o fluido, no seu entorno, também se movimenta. Como o movimento da esfera acelera o fluido em seu entorno, a energia cinética resultante do sistema passa ser constituída, não apenas pelas energias de translação e rotação da esfera, como também pela energia cinética do fluido nas vizinhanças da esfera. Assim, deve-se considerar não apenas a massa da esfera (m_e), mas uma massa efetiva, composta pela massa da esfera, adicionada a uma quantidade de massa (inercial) do fluido (m^*). Esta quantidade de massa adicional é proporcional à massa deslocada do fluido (m_f), ou seja, $m^* = k \cdot m_f$, onde m_f é dado pelo produto da densidade do fluido (ρ_f) pelo volume da esfera (V_e): $m_f = V_e \cdot \rho_f$, de modo que $m^* = k \cdot V_e \cdot \rho_f$. Olsson e Nelson [Robert A. Nelson 1985] argumentam que, para fluidos ideais (não viscosos) $k=0,5$. Contudo, quando se considera a viscosidade, esse valor (utilizado neste trabalho) passa a ser $k=1,18$. O efeito do acréscimo da massa inercial do fluido, nas proximidades da esfera, quando esta acelera é contabilizado através da *força de massa adicional* dada por:

$$\vec{F}_m = -m^* \frac{d\vec{v}}{dt} = -k V_e \rho_f \frac{d\vec{v}}{dt} \quad . \quad (8)$$

A equação (8) nada mais é que um acréscimo à massa da esfera, gerando assim uma massa efetiva do sistema (esfera + fluido nas imediações da esfera). Outra força que atua na esfera (figura2) é a *força de sustentação*. Do ponto de vista matemático, a força de sustentação é análoga à força de arrasto (ver equação (1)), sendo proporcional a um coeficiente de sustentação (C_L) e com o quadrado da velocidade:

$$\vec{F}_s = -\frac{1}{2} C_L A \rho_f v \vec{v} \times \hat{e}_\square \quad . \quad (9)$$

Segundo Cattani (2005, pg. 153), \vec{F}_s resulta da diferença de pressão entre a parte inferior da esfera (onde a camada do fluido nas imediações do sólido está a baixas velocidades) e da parte superior da esfera (onde as velocidades do fluido nas imediações são maiores). Pode-se pensar em \vec{F}_s e \vec{F}_v como as componentes perpendicular (\hat{e}_\perp) e paralela (\hat{e}_\parallel) ao vetor unitário na direção do movimento (\hat{e}_\square) da esfera, respectivamente [Brunetti 2008]. Segundo Brunetti (2008, pg. 223), \vec{F}_s e \vec{F}_v podem ser interpretadas como as componentes de uma força resultante ($\vec{F}_{res} = \vec{F}_s + \vec{F}_v$) devido à efeitos dinâmicos do sistema (como a velocidade relativa entre a esfera e o fluido) e, portanto, dotado de uma natureza distinta do empuxo (\vec{E}), conforme mostra a figura 3.

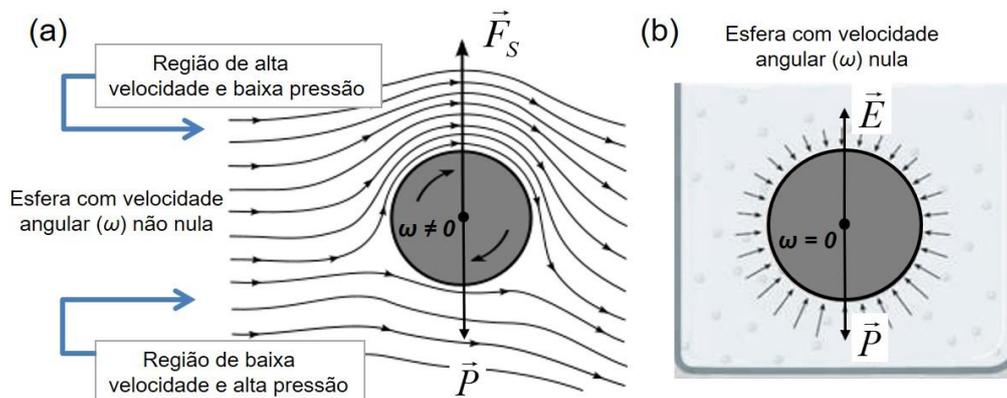


Figura 3. Em (a) um esquema da força de sustentação (F_s) provocada pela diferença de pressão entre as regiões de baixa e alta velocidade com a esfera em rotação – velocidade angular (ω) não nula. Em (b) um esquema para representar o empuxo: a esfera não possui velocidade angular ($\omega=0$).

Note que a força de sustentação decorre, neste caso, do movimento de rotação da esfera. Tal movimento faz com que a velocidade na parte inferior da esfera seja menor que na parte superior, acarretando em uma diferença de pressão. Este fenômeno também é chamado de efeito Magnus e por esse motivo – diferentemente da força de sustentação em uma asa de avião – a força de sustentação (devido à rotação) é chamada de força de sustentação de Magnus. Em termos práticos, conforme a figura 2, o efeito dessa força, juntamente com a componente do empuxo na mesma direção, consiste meramente em atenuar o módulo da força normal amenizando assim a força de atrito cinético. Contudo, como o modelo teórico parte do pressuposto que a esfera rola sem deslizar, será desprezada neste trabalho a força de sustentação.

Por fim, o fator de *correção para paredes finitas*, $\lambda_{(c)}$. Essa correção, proposta inicialmente por Ladenburg [Ladenburg 1907], possui relevante importância na obtenção de valores experimentais da viscosidade de um fluido [Lev Vertchenko 2017] e decorre da proximidade entre a esfera e as paredes de um tubo finito ou de qualquer outro objeto próximo. Essa proximidade aumenta o gradiente de velocidade no fluido ao

redor da esfera, gerando interações hidrodinâmicas adicionais entre a esfera e as paredes e, conseqüentemente, aumentando a força viscosa. Como será visto adiante, esse acréscimo é substancial e, por esse motivo, faz-se necessário uma correção nessa força, usualmente, através de um coeficiente adimensional $\lambda(\zeta)$. Dentre muitas propostas para esse coeficiente [Mitsugo 1979], será utilizado o limite assintótico da expressão de Haberman e Sayre [S. Champmartin 2012]:

$$\lambda(\zeta) = \frac{3\pi\sqrt{2}(1-\zeta)^{-5/2}}{16} \left[1 + \frac{7(1-\zeta)}{60} - \frac{2.227(1-\zeta)^2}{50.4} \right], \quad (10)$$

onde ζ é a razão entre o raio da esfera (r) e o raio do tubo (r_{tubo}): $\zeta = \frac{r}{r_{tubo}}$.

2.2 Obtendo a equação diferencial do sistema

Reescrevendo a massa da esfera como o produto de seu volume pela sua densidade ($m_e = \rho_e V_e$) e, contabilizando as forças na direção do movimento ($\hat{\theta}$) conforme mostra a figura 2, têm-se:

- Para o movimento de translação:

$$\rho_e V_e a = -\lambda(\zeta)F_v - P_e \sin \theta + E \sin \theta - F_m + f - F_c, \quad (11)$$

que pode ser reescrita usando-se o vínculo (rolar sem deslizar) $S = R\theta = r\phi$, como:

$$\rho_e V_e \ddot{S} = -6\pi\eta\lambda(\zeta)r(1+\langle\Lambda\rangle)\dot{S} - \rho_e V_e g \sin \theta + f + \rho_f V_e g \sin \theta - k\rho_f V_e \ddot{S} - C \frac{2\pi\rho_e r}{3} \left(\frac{\eta\langle\text{Re}\rangle}{\rho_f} \right) \dot{S}. \quad (12)$$

- Para o movimento de rotação:

$$I_{cm} \ddot{\phi} = -rf \rightarrow f = -\frac{RI_{cm}\ddot{\theta}}{r^2} = -R\gamma\rho_e V_e \ddot{\theta}, \quad (13)$$

onde γ é o raio de giro [Nussenzveig 2002] que, para uma esfera maciça, este vale $\gamma = 2/5$. Por fim, considerando pequenos ângulos ($\sin(\theta) \cong \theta$), das equações (11), (12) e (13) obtém-se:

$$\ddot{\theta} + 2\pi\eta r \left[\frac{9\lambda(\zeta)\rho_f(1+\langle\Lambda\rangle) + C\rho_e\langle\text{Re}\rangle}{V_e[(1+\gamma)\rho_e + k\rho_f]3\rho_f} \right] \dot{\theta} + \left[\frac{(\rho_e - \rho_f)V_e g}{RV_e[(1+\gamma)\rho_e + k\rho_f]} \right] \theta = 0 \quad (14)$$



A Equação (14), por sua vez, pode ser reescrita como:

$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \alpha^2\theta = 0, \quad (15a)$$

com

$$2\beta = \frac{2\pi\eta r \left[9\rho_f \lambda(\varepsilon) (1 + \langle \Lambda \rangle) + C \rho_e \langle \text{Re} \rangle \right]}{\left[(1 + \gamma) \rho_e + k \rho_f \right] 3\rho_f V_e} \quad (15b)$$

e

$$\alpha^2 = \frac{(\rho_e - \rho_f) R^{-1} g V_e}{\left[(1 + \gamma) \rho_e + k \rho_f \right] V_e} \quad (15c)$$

A solução geral da equação (15a) com os parâmetros dados pelas equações (15b) e (15c), é dada, por:

$$\theta(t) = e^{-\beta t} \left[A e^{+\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} t} + B e^{-\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} t} \right], \quad (16)$$

onde as possíveis soluções particulares dependem tanto das condições iniciais (parâmetros A e B) como dos possíveis valores de β e α . Assim, definindo a frequência angular como $\pm\omega = \pm\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$, verifica-se que ω pode ser: real (se $\beta^2 > \alpha^2$), imaginário (se $\beta^2 < \alpha^2$) ou nulo (se $\beta^2 = \alpha^2$). Dada a vasta literatura sobre o tema [Nussenzveig 2002; Greiner 2004; Stephen T. Thornton 2008], enunciam-se de forma sucinta as soluções para os três casos:

$$\beta^2 < \alpha^2 \rightarrow \theta(t) = \theta_{\max} e^{-\beta t} \left[\cos\left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} t\right) + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \sin\left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} t\right) \right] \quad (17)$$

$$\beta^2 = \alpha^2 \rightarrow \theta(t) = \theta_{\max} e^{-\beta t} (1 + \beta t) \quad (18)$$

$$\beta^2 > \alpha^2 \rightarrow \theta(t) = \theta_{\max} e^{-\beta t} \left[\cosh\left(\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} t\right) + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \sinh\left(\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} t\right) \right] \quad (19)$$

As equações (17), (18) e (19) são as soluções para amortecimento: *sub-crítico*, *crítico* e *super-crítico*, respectivamente, obtidas mediante as condições iniciais: $\theta(0) = \theta_{\max}$ e $\dot{\theta}(0) = 0$. Salientamos que todos os parâmetros envolvidos nas equações 15b e 15c, podem ser ou *diretamente* medidos (densidade da esfera, diâmetro interno do tubo, ângulo inicial θ_{\max} , dentre outros) ou obtidos na literatura (viscosidade dinâmica dos fluidos, raio de giro, coeficientes (C , C_L)) ou ainda estimados (como no caso da velocidade média e o número de Reynolds), evitando assim, *métodos semi-empíricos* baseados em ajustes de curvas experimentais. Por fim, de posse desses valores e com a função $\theta(t)$, as grandezas $S(t) = R\theta(t)$ e $x(t) = R\sin\theta(t)$ podem ser obtidas e comparadas com as curvas obtidas diretamente através dos experimentos.

3. Metodologia experimental

O aparato experimental foi pensado de forma a possuir materiais de baixo custo e fácil acesso, a saber: mangueira modelo cristal transparente 3/4" x 2 mm com 90 cm de comprimento; um suporte de madeira artesanal com duas colunas para apoio (ver Fig. 3); uma esfera metálica maciça de massa 17 g e 0,80 cm de raio. De posse do material, confeccionou-se uma estrutura de madeira a fim de apoiar um tubo transparente (mangueira) em forma de um fragmento de uma semicircunferência, conforme mostra a figura 4.

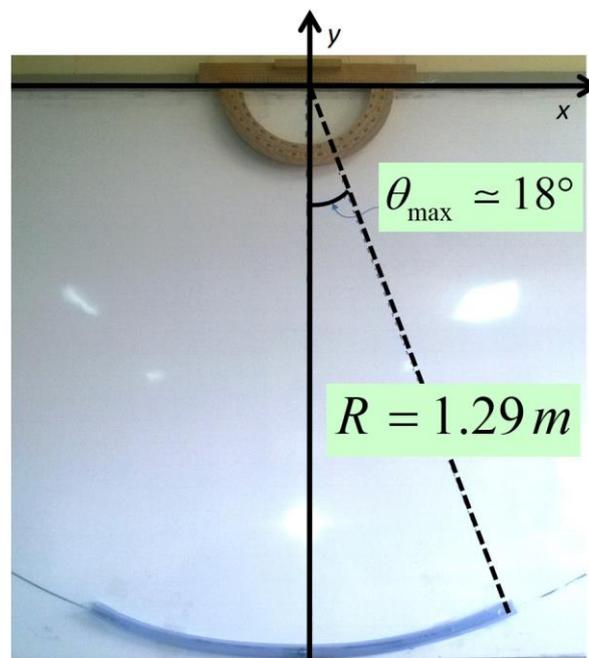


Figura 4. Arranjo com fragmento semicircular de um tubo para estudo da oscilação amortecida.

Com o aparato pronto, inseriu-se primeiramente a esfera no tubo com ar, de modo a formar um ângulo de 18° com o eixo vertical (y). Segundo Nussenzveig (2002,

pg. 123), para ângulos até $22,5^\circ$ a aproximação $\sin(\theta) \sim \theta$ acarreta em um erro de apenas 0,1%. Assim, mesmo para um ângulo de 18° , a margem de erro devido à linearização da equação diferencial que rege a dinâmica do sistema (ver equação 5) não é substancial, uma vez que a ênfase do trabalho é o regime de oscilação amortecida e não a obtenção de valores com precisão numérica dos mesmos.

As oscilações foram registradas com a câmera de vídeo do celular (*Lumia 720*) e, valendo-se do software *Tracker* [Jesus 2014], extraíram-se dados referentes às diversas posições ($X(t)$, $Y(t)$ e $S(t)$) da esfera ao longo do tempo por meio de vídeoanálise. Posteriormente, os dados foram tratados no software *Origin 8.0* para a obtenção da curva experimental. Em seguida, o experimento foi novamente realizado com o tubo contendo água e, por fim, com óleo de motor da marca Lubrax (SAE 20W-50).

Em se tratando do modelo teórico (Eqs. 15 até 19) parâmetros tais como massa, raio da esfera e diâmetro do tubo foram *diretamente* medidos e, a partir deles grandezas tais como: volume e densidade da esfera, fator de Ladenburg ($\lambda(\zeta)$) e raio de giro, foram calculados com as expressões usuais encontradas na literatura [Nussenzveig 2002; Cattani 2005] e encontram-se na Tabela 1. A viscosidade dinâmica dos fluidos foi obtida através de tabelas disponíveis na literatura [Cattani 2005; Brunetti 2008; USP 2020] e, por fim, a velocidade média (v_m) e o número de Reynolds médio foram estimados considerando-se o comprimento da trajetória da esfera com um intervalo de 4 segundos para a água, 20 segundos para o ar e 35 segundos para o óleo, conforme mostra a Tabela 2. De posse desses parâmetros os valores de β e α podem ser diretamente calculados através das equações 15b e 15c sem a necessidade de ajustes de dados experimentais e as curvas teóricas podem ser obtidas para cada fluido, de acordo com as expressões matemáticas dos modelos teóricos desenvolvidos na seção anterior (equações 17 à 19).

Tabela 1. Dados da Esfera e do Tubo

Densidade da esfera (ρ_e)	$6,85 \pm 1,12 \text{ g/cm}^3$
Massa da esfera (m_e)	$17,0 \pm 0,5 \text{ g}$
Raio da esfera (r)	$0,80 \pm 0,05 \text{ cm}$
Volume da esfera (V_e)	$2,48 \pm 0,40 \text{ cm}^3$
Raio do Tubo (r_{tubo})	$1,15 \pm 0,05 \text{ cm}$
Razão ($\zeta = r / r_{tubo}$)	$0,696 \pm 0,053$
Fator $\lambda(\zeta)$	$16,81 \pm 0,36$

Tabela 2. Dados utilizados no modelo teórico.

Fluido	$\rho_f \text{ (g/cm}^3\text{)}$	$v_m \text{ (cm/s)}$	$\langle R_e \rangle$	$\eta \text{ (g/cm.s)}$	$1 + \langle \Lambda \rangle$
Ar	$1,204 \times 10^{-3}$	38,35	184,08	$1,820 \times 10^{-4}$	11,70
Água	0,998	7,13	569,26	$1,002 \times 10^{-2}$	28,17
Óleo	0,896	0,87	0,07	7,650	1,03



Como será visto adiante, alterar a viscosidade dinâmica do meio (η) resulta em variações consideráveis nos parâmetros β e α de modo que diferentes regimes de oscilações amortecidas (subcrítico, quase-crítico e supercrítico) podem ser obtidos pelo modelo teórico.

4. Resultados e discussões: regimes de amortecimento e viscosidade do fluido

A figura 5a mostra o comportamento do sistema em função do tempo para cada fluido contido no tubo. Os resultados experimentais mostram que, enquanto para o óleo temos um regime de oscilação supercrítico, tanto para o ar quanto para a água, temos oscilações amortecidas subcríticas, mas com o tubo contendo água, o sistema apresenta um comportamento muito próximo da criticalidade. Conforme esperado, existe uma enorme dependência entre o regime de oscilação e a viscosidade dinâmica do fluido (η), visto que esta última influi, sobretudo, na velocidade da esfera, no número de Reynolds e, conseqüentemente, na intensidade da força viscosa (F_v).

A figura 5b apresenta o modelo teórico desenvolvido nas seções 2.1 e 2.2. Pode ser observado que o modelo descreve de forma qualitativamente razoável o comportamento experimental do sistema em regime de oscilação supercrítico para o tubo contendo óleo. Tanto para o ar quanto para a água, têm-se oscilações amortecidas subcríticas, com um comportamento muito próximo da criticalidade no caso da água. Dois fatores são de extrema importância para o sucesso qualitativo do modelo teórico: a correção de Ladenburg e a consideração de colisões entre a esfera e as paredes do tubo.

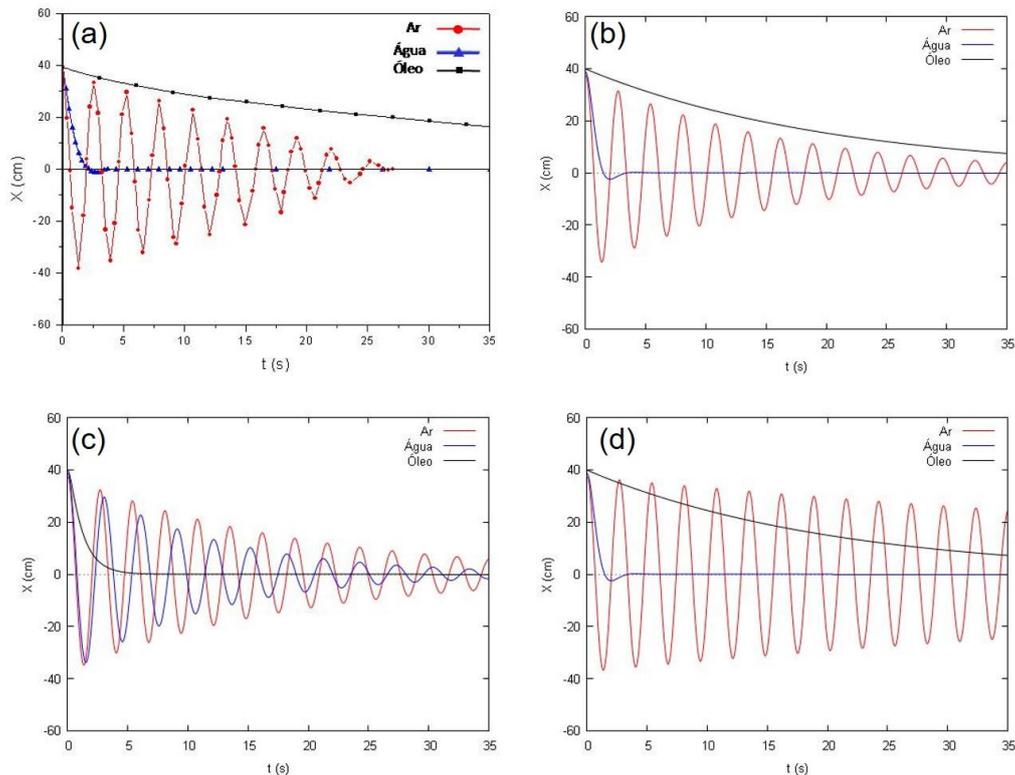


Figura 5. (a) Resultados experimentais para ar, água e óleo. (b) Resultados teóricos para ar, água e óleo. Em (c) os resultados desconsiderando a correção de Ladenburg e em (d) desconsiderando a força devido às colisões da esfera com as paredes do tubo.

O fator de Ladenburg é de essencial importância sobretudo para a água e para o óleo, fluidos que possuem uma densidade considerável quando comparados com a densidade do ar (cerca de mil vezes maior). Sem essa correção, é possível ver na figura 5c que o modelo teórico prevê regimes de oscilações qualitativamente equivocados para esses dois fluidos: regime crítico para o óleo e subcrítico para a água. Nota-se que o fator $\lambda(\zeta)$ corrige a viscosidade por um fator multiplicativo de 16,81. Esse fator multiplicativo faz com que os valores de β – e as relações entre α e β – que definem as soluções (Eq. 17 – 19) da equação diferencial do problema (Eq. 15a), sofram alterações consideráveis ao ponto de alterarem os regimes de oscilação, conforme mostra a figura 5c e a tabela 3. Tanto com esfera em água quanto no óleo, essa correção é crucial para se identificar, ao menos qualitativamente, o regime oscilatório correto, fato esse que não acontece com o ar dada a ordem de grandeza da viscosidade dinâmica deste último.

Tabela 3: Valores do parâmetro β (s^{-1}) para diferentes situações

Parâmetro β (s^{-1})	Ladenburg com Colisões	Só Colisões	Só Ladenburg
β_{ar}	0,064	0,053	0,012
$\beta_{água}$	1,364	0,088	1,357
$\beta_{óleo}$	38,498	2,927	38,229

Em se tratando do termo de colisão, observa-se pela figura 5b (com coeficiente de colisão $C=2 \times 10^{-3}$) e pela figura 5d (com $C=0$) que este termo, apesar de irrelevante para o tubo com água e com óleo, não pode ser desprezado para o tubo com ar. Dito de outra forma, com o coeficiente de colisão nulo as curvas teóricas (figura 5d) da esfera na água e no óleo não mudam consideravelmente como com a esfera no tubo com ar. Neste último caso, apesar do regime de oscilação continuar sendo subcrítico, o decaimento exponencial é bem menos acentuado do que os mostrados nas curvas experimentais na figura 5a e considerando as colisões conforme mostrado na figura 5b. Tal fato deve-se tanto a alta velocidade da esfera neste fluido (quando comparada com os demais), quanto ao valor da densidade do ar (cerca de mil vezes menor que a densidade do óleo e a da água) que aparece no denominador da equação 7.

Obviamente, as curvas experimentais e teóricas não são iguais, mas dado o caráter extremamente rudimentar do experimento, o modelo teórico descreve de maneira qualitativamente satisfatória o comportamento do sistema, conforme os dados experimentais obtidos. O grande problema está em descrever o término do movimento da esfera no tubo com ar, pois comparando as figuras 5a e 5b, vê-se que o movimento cessa antes do previsto pelo modelo teórico. Presume-se, que curvando o tubo como na figura 4, as rugosidades surgidas na sua superfície interna devido à essa deformação, nas imediações de $\theta = 0^\circ$, fazem com que, ao final do movimento, o tempo de permanência da esfera nessa região seja maior por conta da diminuição de sua velocidade, alterando, assim, o valor do coeficiente de colisão. Um modelo teórico que leve esse fato em consideração, apesar de instigante, foge ao escopo desse trabalho.

Por fim, ressalta-se que um regime crítico de amortecimento de fato, consiste em uma condição algébrica de difícil obtenção experimental. Assim, constata-se que a esfera no tubo com água, apesar de não ser um regime crítico de fato, se apresenta como algo muito próximo deste, ou seja, um regime ‘quase-crítico’.

5. Conclusão

Quando se pensa em movimento oscilatório, geralmente vem à mente pêndulos e sistemas massa-mola. Além disso, os diferentes regimes de amortecimento (crítico, supercrítico e subcrítico) não são usualmente abordados em atividades experimentais. Neste trabalho foi proposta uma atividade experimental cujo objetivo consistiu em, através de um experimento rudimentar de baixo custo, estudar os sistemas oscilatórios amortecidos em seus diversos regimes de oscilação: crítico, supercrítico e subcrítico. Nesta proposta, o movimento de uma esfera abandonada dentro de um tubo levemente curvado permite a obtenção de dados experimentais de um movimento oscilatório amortecido em seus diferentes regimes a depender do fluido dentro do tubo. Além disso, o modelo teórico, por levar em conta a correção de Ladenburg e colisões entre a esfera e as paredes do tubo, descreve, de maneira satisfatória os resultados experimentais.

Ressalta-se que a correlação entre os dados experimentais e o crescente grau de sofisticação dos modelos teóricos – primeiramente inserindo a correção de Ladenburg e, posteriormente, inserindo o termo de colisão nos modelos teóricos – é parte



fundamental do modelo teórico. Assim, a diferença observada na complexidade dos modelos, juntamente com uma discussão acerca de suas falhas e limitações, podem auxiliar na desconstrução do realismo ingênuo, essência do conhecimento que concebe os modelos teóricos como uma descrição fiel e absolutamente verdadeira dos fenômenos da natureza. Além disso, o movimento periódico de uma esfera em um tubo contendo diferentes tipos de fluidos pode vir a proporcionar aos estudantes uma diferenciação progressiva [Moreira 2011] de conceitos envolvendo oscilações que outrora, estavam circunscritos à pêndulos e sistemas massa-mola. Logo, destaca-se a importância de diferentes propostas de osciladores que permitam generalizar, reconciliar (integrativamente) e tornar este conteúdo cada vez mais significativo.

6. Referências

- A. A. Garcia , C. E. S. A., N. L. Speziali (2009). Física Experimental Básica na Universidade. Belo Horizonte, Editora UFMG.
- Brunetti, F. (2008). Fluidodinâmica, pg.223 Mecânica do Fluidos. Person. São Paulo.
- Cattani, M. S. D. (2005). Elementos de Mecânica dos Fluidos. São Paulo, Ed. Blucher.
- Greiner, W. (2004). Classical Mechanics: point particles and relativity. New York, Springer Verlag.
- Jan, C. D. and J. C. Chen (1997). "Movements of a sphere rolling down an inclined plane." *JOURNAL OF HYDRAULIC RESEARCH* **35**(5): 19.
- Jesus, V. L. B. d. (2014). Experimentos e Vídeo Análise - Dinâmica. São Paulo, Editora Livraria da Física.
- K. Y. Yick, C. R. T., T. Peacock and R. Stocker (2009). "Enhanced drag of a sphere settling in a stratified fluid at small Reynolds numbers." *Journal of Fluid Mechanics* **632**: 20.
- Ladenburg, R. (1907). *Ann. d. Phys* **23**(447).
- Lemos, N. A. (2007). Mecânica Analítica. São Paulo, Editora Livraria da Física.
- Lev Vertchenko, L. V. (2017). "Determinação da viscosidade por meio da velocidade terminal: uso da força de arrasto com termo quadrático na velocidade." *Revista Brasileira de Ensino de Física* **34**(4): 11.
- Mitsugo, I., Tsutomu, I. (1979). "Experimental wall correction factors of single solid spheres in circular cylinders." *JOURNAL OF CHEMICAL ENGINEERING OF JAPAN* **12**(3): 4.
- Moreira, M. A. (2011). Teoria da aprendizagem significativa: a teoria e textos complementares. São Paulo, Editora Livraria da Física.
- Nussenzveig, H. M. (2002). Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor. São Paulo, Blucher.



- Peruzzo, J. (2012). Experimentos de Física Básica: termodinâmica, ondulatória e óptica. São Paulo, Editora Livraria da Física.
- Peruzzo, J. (2012). Experimentos de Física Básica:mecânica. São Paulo, Editora Livraria da Física.
- Robert A. Nelson, M. G. O. (1985). "The pendulum - Rich physics from simple system." American Journal of Physics **54**(2): 10.
- Román Martino, A. P. a. M. F. P. (2015). "Experimental and analytical study of the motion of a sphere falling along an inclined plane in still water." Powder Technology **283**: 8.
- S. Champmartin , A. A., R P Chhabra (2012). "Levitating spherical particle in a slightly tapered tube at low Reynolds number: application to the low-flow rate rotameters." Review os Scientific Instruments **83**(12): 8.
- Stephen T. Thornton, J. B. M. (2008). Classical Dynamics of Particles and Systems. New York, Thomson.
- USP (2020). Tabelas e Constantes - Laboratório Didático - Experiência. Viscosidade: Dados dos Óleos: <http://portal.if.usp.br/labdid/pt-br/tabelas-e-constantas>.