



## Novos exemplos de espaços vetoriais do tipo gráfico

Rufino, Elzimar O.<sup>1</sup>, Naveca, Kayo D. A.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Matemática- Universidade Federal de Roraima - UFRR

<sup>2</sup>E.E.B.P Fundação Bradesco - Boa Vista-RR

**Abstract.** *In this article we present examples of vector spaces of the graphic type. The only example we knew of was the vector space structure in the parabola, which can be seen in [3]. Our work generalizes the idea to a graph of a defined application of a vector space in a non-empty set. In addition, we also show that the graph of such applications can be equipped with many structures of vector spaces. In particular, we show that it is possible to provide the graph with a vector space structure in which the null vector can be any pre-fixed element. Finally, we define an inner product in graphic-type spaces induced by an inner product in the domain of an application. In addition, we make explicit the orthogonal subspaces in the graphic type-spaces.*

**Resumo.** *Neste artigo apresentamos exemplos de espaços vetoriais do tipo gráfico. O único exemplo que conhecíamos era a estrutura de espaço vetorial na parábola, que pode ser visto em [3]. Nosso trabalho generaliza a ideia para um gráfico de uma aplicação definida de um espaço vetorial em um conjunto não-vazio. Além disso, mostramos também que o gráfico de tais aplicações pode ser dotado de muitas estruturas de espaços vetoriais. Em particular, mostramos que é possível munir o gráfico com uma estrutura de espaço vetorial na qual o vetor nulo pode ser qualquer elemento pré-fixado. Por fim, definimos um produto interno em espaços tipo gráfico induzido por um produto interno no domínio de uma aplicação. Além disso, explicitamos os subespaços ortogonais nos espaços tipo gráfico.*

### 1. Introdução

Conforme ressalta Dorier em [1], a teoria axiomática dos espaços vetoriais é uma conquista recente da matemática e muito embora Giuseppe Peano tivesse dado a primeira definição axiomática de um espaço vetorial em 1888 [76,141-152], a teoria não foi realmente desenvolvida antes de 1920.

Atualmente a teoria dos espaços vetoriais é essencial em muitas subáreas da própria matemática bem como em outras áreas do conhecimento. Podemos citar, por exemplo, a geometria diferencial que se apropria de um espaço vetorial tangente em cada ponto de uma variedade para desenvolver seus resultados. Embora a teoria dos espaços vetoriais de dimensão finita esteja bem desenvolvida, novas perspectivas possuem grande relevância em sua compreensão.

Recentemente, Lopes em [5] construiu exemplos interessantes de espaços vetoriais considerando bijeções com um espaço vetorial inicial. Nosso trabalho é uma contribuição a mais na teoria dos espaços vetoriais de dimensão finita.



## 2. Preliminares

Vamos começar essa seção recordando a definição de um espaço vetorial.

Um *espaço vetorial* sobre um corpo  $\mathbb{K}$  é constituído de um conjunto não-vazio  $E$  munido de uma operação de adição

$$+ : E \times E \longrightarrow E \\ (u, v) \longmapsto u+v$$

e uma operação de multiplicação por escalar

$$\cdot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E \\ (\lambda, u) \longmapsto \lambda \cdot u$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

1. Associatividade :  $(u + v) + w = u + (v + w)$ , para todos  $u, v, w \in E$ .
2. Comutatividade:  $u + v = v + u$ , para todos  $u, v \in E$ .
3. Existe um elemento  $0 \in E$ , tal que  $u + 0 = u$ , para todo  $u \in E$ .
4. Para cada  $u \in V$ , existe um elemento  $-u \in V$  tal que  $u + (-u) = 0$ .
5. Associatividade:  $(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$ , para todos  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  e para todo  $u \in E$ .
6. Distributividade:  $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$ , para todos  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  e para todo  $u \in E$ .
7. Distributividade:  $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{K}$  e para todos  $u, v \in E$ .
8. Multiplicação pela unidade:  $1 \cdot u = u$ , para todo  $u \in E$ .

Um *subespaço vetorial* de um espaço vetorial  $E$  é um subconjunto  $W \neq \emptyset$  de  $E$  que também é um espaço vetorial com as operações induzidas pelas operações de  $E$ . Como consequência, temos que  $W$  é subespaço vetorial de  $E$  se são satisfeitas as seguintes condições:

1.  $W$  é não-vazio.
2.  $u + v \in W$ , para todos  $u, v \in W$ .
3.  $\alpha \cdot u \in W$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{K}$  e para todo  $u \in W$ .

Neste trabalho, salvo menção em contrário, iremos considerar apenas espaços vetoriais de dimensão finita. Além disso, o corpo dos escalares  $\mathbb{K}$ , será o corpo dos números reais  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 2.1.** Os espaços  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$  com as operações definidas por

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) &= (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \dots, \lambda \cdot x_n) \end{aligned}$$

são exemplos bem conhecidos de espaços vetoriais de dimensão finita.

Um conceito essencial neste trabalho é o de gráfico de uma aplicação. A respeito desse conceito temos a seguinte definição.

**Definição 2.1.** Sejam  $E$  um espaço vetorial real,  $X$  um conjunto não-vazio e  $T : E \rightarrow X$  uma aplicação. O gráfico de  $T$  é, por definição, o conjunto

$$G(T) = \{(u, v) \in E \times X; u \in E \text{ e } v = T(u)\}.$$

**Exemplo 2.2.** Seja  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $T(x) = 2x$ . O gráfico de  $T$  é dado por

$$G(T) = \{(x, 2x); x \in \mathbb{R}\}.$$

Neste trabalho veremos que retas que não passam pela origem de  $\mathbb{R}^2$  podem ser dotadas de uma estrutura de espaço vetorial, porém perdem a propriedade de serem subespaços do ambiente  $\mathbb{R}^2$  com as operações usuais.

## 2.1. Produto interno

Um produto interno definido em um espaço vetorial  $E$  sobre o corpo dos escalares  $\mathbb{R}$  é uma função  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz as seguintes propriedades:

- i)  $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \forall u, v, w \in E$ ;
- ii)  $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u, v \in E$ .
- iii)  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \forall u, v \in E$ .
- iv)  $\langle u, u \rangle \geq 0$  e  $\langle u, u \rangle > 0$  se e só se  $u \neq 0$ .

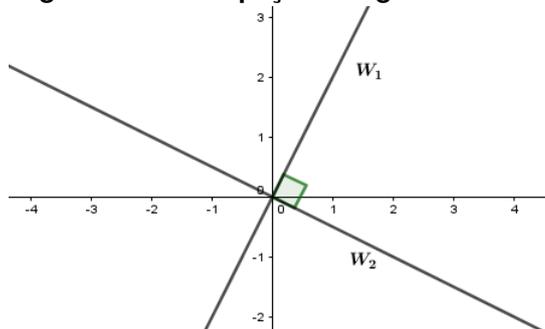
**Exemplo 2.3.** No espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$ , com as operações usuais definidas no Exemplo 2.1 o produto interno usual é dado por

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

**Definição 2.2.** Sejam  $E$  um espaço vetorial com um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $W_1$  e  $W_2$  subespaços vetoriais de  $E$ . Dizemos que  $W_1$  é ortogonal a  $W_2$  quando  $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$  para quaisquer  $w_1 \in W_1$  e  $w_2 \in W_2$ . Para indicar que  $W_1$  é ortogonal a  $W_2$  utiliza-se a notação  $W_1 \perp W_2$ .

**Exemplo 2.4.** Os subespaços  $W_1 = \{(x, 2x); x \in \mathbb{R}\}$  e  $W_2 = \{(t, -\frac{t}{2}); t \in \mathbb{R}\}$  de  $\mathbb{R}^2$  são ortogonais considerando-se o produto interno usual.

**Figura 2.1. Subespaços ortogonais em  $\mathbb{R}^2$**



Fonte: Autor

*De fato: basta ver que se  $u = (x, 2x) \in W_1$  e  $v = (t, -\frac{t}{2}) \in W_2$ , então  $\langle u, v \rangle = \langle (x, 2x), (t, -\frac{t}{2}) \rangle = xt + 2x(-\frac{t}{2}) = 0$ .*

Uma das vantagens de se obter subespaços ortogonais é a possibilidade usá-los para escrever o espaço como uma soma direta. No exemplo anterior, podemos escrever  $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$ , onde  $W_1 \oplus W_2 = \{w_1 + w_2; w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2\}$ .

## 2.2. Projeções canônicas

Dados os conjuntos não-vazios  $A_1, A_2, \dots, A_n$  define-se a  $i$ -ésima projeção (ou projeção no  $i$ -ésimo fator)  $\pi_i : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_i \times \dots \times A_n \rightarrow A_i$  pondo

$$\pi_i(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n) = a_i.$$

**Exemplo 2.5.** Se  $A_1 = \mathbb{R}^2$  e  $A_2 = \mathbb{R}$  então,  $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são dadas, respectivamente, por  $\pi_1((x, y), z) = (x, y)$  e  $\pi_2((x, y), z) = z$ .

## 2.3. Retas em espaços vetoriais

Vamos dar aqui uma definição de reta em espaços vetoriais análoga ao que acontece nos espaços  $\mathbb{R}^n$ .

Recordamos que, no espaço  $\mathbb{R}^n$ , a reta  $r$  que passa pelos pontos  $A$  e  $B$  é dada por

$$r = \{(1-t)A + tB; t \in \mathbb{R}\}.$$

Em consonância com esta ideia, temos a seguinte definição.

**Definição 2.3.** Em um espaço vetorial  $(E, +, \cdot)$ , a reta  $r$  que contém os vetores  $u$  e  $v$  de  $E$  é, por definição, o conjunto  $r = \{(1-t)u + tv; t \in \mathbb{R}\}$ .

## 3. Espaços vetoriais do tipo gráfico: resultados e exemplos

Nosso primeiro resultado mostra como colocar uma estrutura de espaço vetorial no gráfico de uma aplicação  $T : E \rightarrow X$ , onde  $E$  é um espaço vetorial e  $X$  um conjunto não-vazio. É o que consta no seguinte teorema.

**Teorema 3.1.** Sejam  $E$  um espaço vetorial  $n$ -dimensional,  $X$  um conjunto não-vazio e  $T : E \rightarrow X$  uma aplicação. Então, o gráfico de  $T$  possui uma estrutura de espaço vetorial  $n$ -dimensional.

*Demonstração.* Dados  $u, v \in E$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , utilizaremos a notação  $u + v$  para indicar a adição e  $\lambda u$  para indicar a multiplicação, respectivamente, em  $E$ . Além disso, os símbolos  $\oplus$  e  $\odot$  serão utilizados, respectivamente, para denotar a adição e a multiplicação em  $G(T)$ . A operação de adição  $\oplus : G(T) \times G(T) \rightarrow G(T)$  e a de multiplicação por escalar  $\odot : \mathbb{R} \times G(T) \rightarrow G(T)$  serão definidas por

$$\begin{aligned}(u, T(u)) \oplus (v, T(v)) &= (u + v, T(u + v)) \\ \lambda \odot (u, T(u)) &= (\lambda u, T(\lambda u)).\end{aligned}$$

Vamos verificar que são satisfeitas as oito propriedades de espaço vetorial.

Dados  $\mathbf{u} = (u, T(u)), \mathbf{v} = (v, T(v)), \mathbf{w} = (w, T(w)) \in G(T)$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , temos:

1. Associatividade:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) &= (u, T(u)) \oplus ((v, T(v)) \oplus (w, T(w))) \\ &= (u, T(u)) \oplus ((v + w), T(v + w)) \\ &= (u + (v + w), T(u + (v + w))) \\ &= ((u + v) + w, T((u + v) + w)) \\ &= (u + v, T(u + v)) \oplus (w, T(w)) \\ &= ((u, T(u)) \oplus (v, T(v))) \oplus (w, T(w)) \\ &= [\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}] \oplus \mathbf{w}.\end{aligned}$$



## 2. Comutatividade

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} &= (u, T(u)) \oplus (v, T(v)) \\ &= (u + v, T(u + v)) \\ &= (v + u, T(v + u)) \\ &= (v, T(v)) \oplus (u, T(u)) \\ &= \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}. \end{aligned}$$

3. O elemento nulo é dado por  $\mathbf{0} = (0, T(0)) \in G(T)$ . De fato:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} \oplus (u, T(u)) &= (0, T(0)) \oplus (u, T(u)) \\ &= (0 + u, T(0 + u)) = (u, T(u)) \end{aligned}$$

4. O simétrico do elemento  $\mathbf{u} = (u, T(u)) \in G(T)$  é dado por  $-\mathbf{u} = (-u, T(-u))$ . De fato:

$$\begin{aligned} (u, T(u)) \oplus (-u, T(-u)) &= (u + (-u), T(u + (-u))) \\ &= (0, T(0)) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

## 5. Associatividade

$$\begin{aligned} (\alpha.\beta) \odot \mathbf{u} &= (\alpha.\beta) \odot (u, T(u)) \\ &= ((\alpha.\beta).u, T((\alpha.\beta).u)) \\ &= (\alpha.(\beta.u), T(\alpha.(\beta.u))) \\ &= \alpha \odot (\beta.u, T(\beta.u)) \\ &= \alpha \odot (\beta \odot (u, T(u))) \\ &= \alpha \odot (\beta \odot \mathbf{u}). \end{aligned}$$

## 6. Distributividade

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \odot \mathbf{u} &= (\alpha + \beta) \odot (u, T(u)) \\ &= ((\alpha + \beta).u, T((\alpha + \beta).u)) \\ &= (\alpha.u + \beta.u, T(\alpha.u + \beta.u)) \\ &= (\alpha.u, T(\alpha.u)) \oplus (\beta.u, T(\beta.u)) \\ &= \alpha \odot (u, T(u)) \oplus \beta \odot (u, T(u)) \\ &= \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \beta \odot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

## 7. Distributividade

$$\begin{aligned}\alpha \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) &= \alpha \odot ((u, T(u)) \oplus (v, T(v))) \\ &= \alpha \odot (u + v, T(u + v)) \\ &= (\alpha \cdot (u + v), T(\alpha \cdot (u + v))) \\ &= (\alpha \cdot u + \alpha \cdot v, T(\alpha \cdot u + \alpha \cdot v)) \\ &= (\alpha \cdot u, T(\alpha \cdot u)) \oplus (\alpha \cdot v, T(\alpha \cdot v)) \\ &= \alpha \odot (u, T(u)) \oplus \alpha \odot (v, T(v)) \\ &= \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \alpha \odot \mathbf{v}.\end{aligned}$$

## 8. Multiplicação pela unidade

$$\begin{aligned}1 \odot \mathbf{u} &= 1 \odot (u, T(u)) \\ &= (1 \cdot u, T(1 \cdot u)) \\ &= (u, T(u)) \\ &= \mathbf{u},\end{aligned}$$

para qualquer  $\mathbf{u} \in G(T)$ .

Vamos mostrar que se  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é uma base de  $E$  então  $B = \{(v_1, T(v_1)), (v_2, T(v_2)), \dots, (v_n, T(v_n))\}$  é uma base de  $G(T)$ .

Se  $a_1, a_2, \dots, a_n$  são números reais tais que

$$a_1 \odot (v_1, T(v_1)) \oplus \dots \oplus a_n \odot (v_n, T(v_n)) = 0,$$

então  $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$ . Como o conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é linearmente independente em  $E$ , segue que  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ . Logo,  $B$  é um conjunto linearmente independente. Por outro lado, como  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é uma base de  $E$ , dado  $v \in E$  existem  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  tais que  $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ . Assim,

$$\begin{aligned}(v, T(v)) &= (a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)) \\ &= (a_1 v_1, T(a_1 v_1)) \oplus \dots \oplus (a_n v_n, T(a_n v_n)) \\ &= a_1 \odot (v_1, T(v_1)) \oplus \dots \oplus a_n \odot (v_n, T(v_n)).\end{aligned}$$

Isso mostra que  $B$  gera  $G(T)$ . Assim,  $B$  é um conjunto linearmente independente que gera  $G(T)$ , possuindo  $n$  elementos, como queríamos mostrar.  $\square$

**Exemplo 3.1.** O conjunto  $W = \{(x, 4); x < 0\} \cup \{(0, 6)\} \cup \{(x, x^3 + 2); x > 0\}$ , possui a estrutura de espaço vetorial dada pelo Teorema 3.1. Basta ver que  $W = G(T)$ , onde  $T : \mathbb{R} \rightarrow ]2, +\infty[$  é a função tal que

$$T(x) = \begin{cases} 4, & \text{se } x < 0 \\ 6, & \text{se } x = 0 \\ x^3 + 2, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Na Figura 3.1 temos uma descrição geométrica de  $W$ . Qualquer elemento do tipo  $(x, T(x))$  com  $x \neq 0$  constitui uma base desse espaço vetorial. O vetor nulo do espaço é o elemento  $(0, 6)$ , o simétrico do vetor  $u = (x, 4)$  com  $x < 0$ , é o elemento  $-u = (-x, T(-x)) = (-x, -x^3 + 2)$ . Além disso, se  $\lambda > 0$  então

$$\lambda \odot (x, 4) = (\lambda x, f(\lambda x)) = (\lambda x, 4)$$

e

$$\lambda \odot (x, x^3 + 2) = (\lambda x, \lambda^3 x^3 + 2).$$

Se  $\lambda < 0$ , temos que

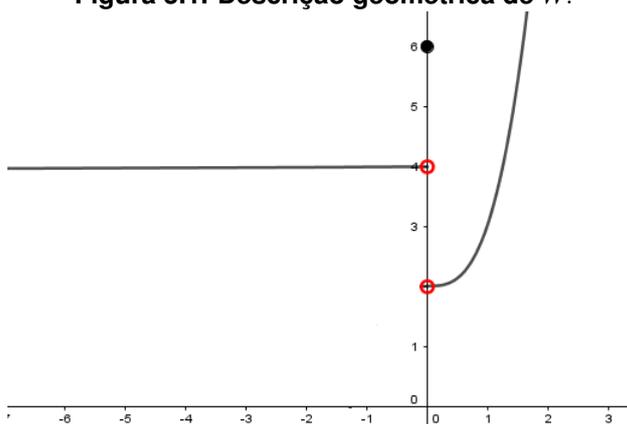
$$\lambda \odot (x, 4) = (\lambda x, \lambda^3 x^3 + 2)$$

e

$$\lambda \odot (x, x^3 + 2) = (\lambda x, 4).$$

Em particular,  $-(-2, 4) = (2, 10)$ ,  $5 \odot (-3, 4) = (-15, 4)$ ,  $-2 \odot (-1, 4) = (2, 10)$ .

Figura 3.1. Descrição geométrica de  $W$ .



Fonte: Autor

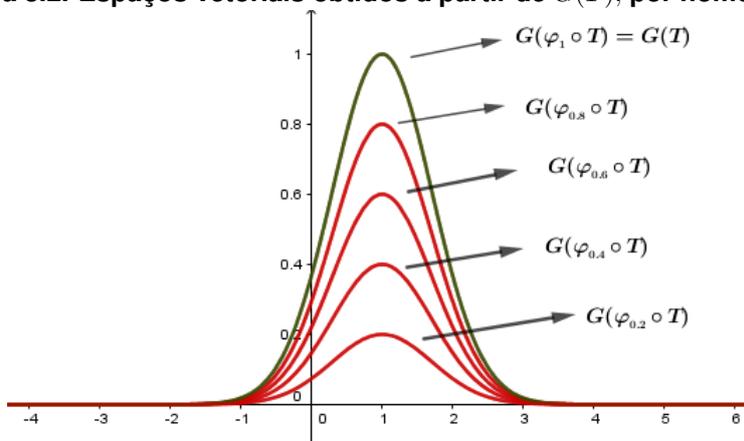
**Corolário 3.1.** Seja  $T : E \rightarrow X$  uma aplicação do espaço vetorial  $E$  no conjunto não vazio  $X$  e  $\varphi : X \rightarrow X$  uma aplicação. Então  $W = \{(v, (\varphi \circ T)(v)); v \in E\}$  possui uma estrutura de espaço vetorial.

*Demonstração.* É imediato, visto que  $W = G(\varphi \circ T)$ . □

A relevância do Corolário 3.1 está no fato de que podemos obter novos espaços vetoriais a partir de um espaço vetorial tipo gráfico fixado, como veremos logo a seguir.

**Exemplo 3.2.** Um caso interessante é obtido quando  $X$  é um espaço vetorial e  $\varphi : X \rightarrow X$  é uma homotetia. Neste caso, o novo espaço vetorial  $W = G(\varphi \circ T)$  é obtido a partir do espaço  $G(T)$  via uma deformação homotética. Para visualizarmos essa situação, seja  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $T(x) = e^{-(x-1)^2}$ . Para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ , os espaços vetoriais  $W_\lambda = G(\varphi_\lambda \circ T)$  onde  $\varphi_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são as homotetias  $\varphi_\lambda(x) = \lambda x$ , são obtidos a partir de  $G(T)$  via as deformações homotéticas. A Figura 3.2 mostra alguns casos particulares para  $\lambda$ .

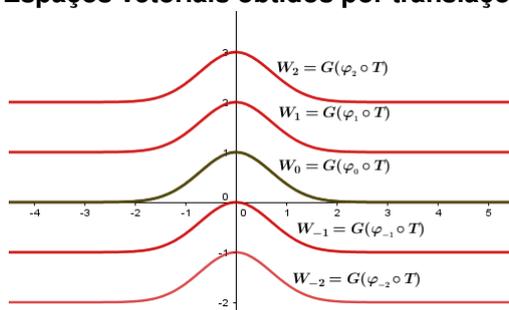
**Figura 3.2. Espaços vetoriais obtidos a partir de  $G(T)$ , por homotetias**



Fonte: Autor

**Exemplo 3.3.** Sejam  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $T(x) = e^{-x^2}$ ,  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a translação definida por  $\varphi(x) = x + k$ , onde  $k \in \mathbb{R}$ . Para cada  $k \in \mathbb{R}$ , o espaço vetorial  $W_k = G(\varphi_k \circ T)$  é obtido a partir do espaço inicial  $W_o = G(T)$  via uma translação vertical. Podemos dizer que  $W_k$  é uma cópia do espaço  $W_o = G(T)$ . Veja a Figura 3.3.

**Figura 3.3. Espaços vetoriais obtidos por translações verticais.**

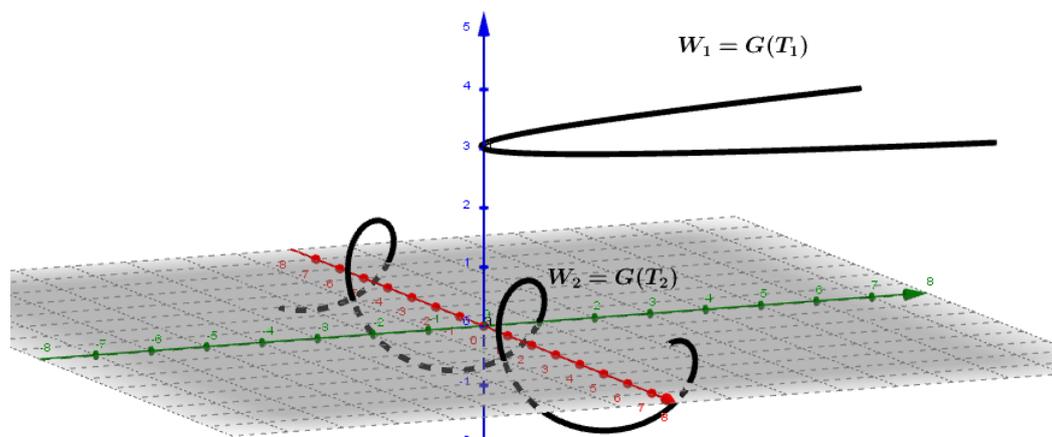


Fonte: Autor

Nosso próximo exemplo trata de espaços vetoriais unidimensionais no ambiente  $\mathbb{R}^3$ . Ressaltamos que não se trata de um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^3$  com suas operações usuais <sup>1</sup>.

**Exemplo 3.4.** Podemos dotar os subconjuntos  $W_1 = \{(x, x^2, 3); x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$  e  $W_2 = \{(x, \cos(x), \sin(x)); x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ , com a estrutura de espaço vetorial dada pelo Teorema 3.1. Basta ver que  $W_1 = G(T_1)$  e  $W_2 = G(T_2)$ , onde  $T_1, T_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  são definidas, respectivamente, por  $T_1(x) = (x^2, 3)$  e  $T_2(x) = (\cos(x), \sin(x))$ . Temos a descrição geométrica destes espaços na Figura 3.4.

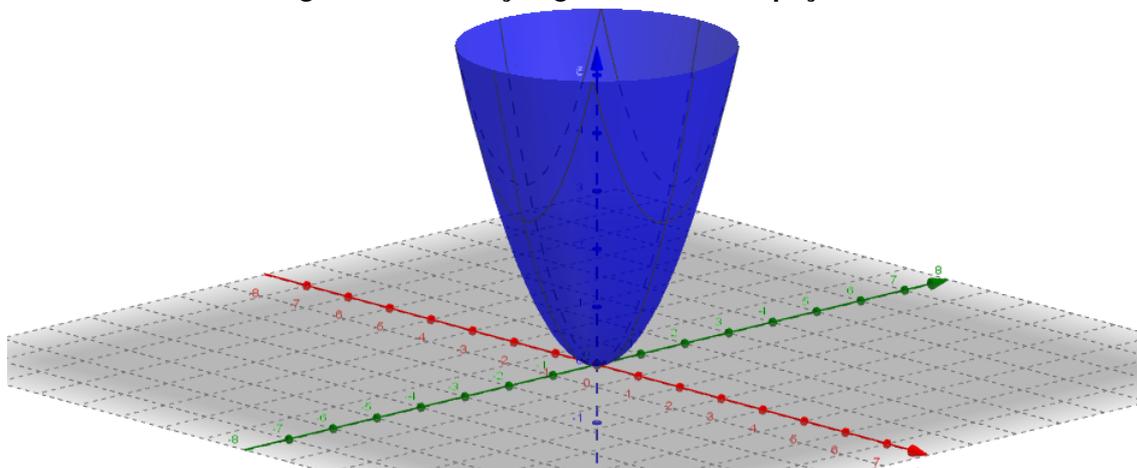
<sup>1</sup>Como é bem conhecido, os subespaços unidimensionais de  $\mathbb{R}^3$  com suas operações usuais são as retas que passam pelo ponto  $(0,0,0)$ . Com operações modificadas adequadamente, podemos ter retas de  $\mathbb{R}^3$  que não passam por  $(0, 0, 0)$  como seus subespaços.

Figura 3.4. Espaços unidimensionais no ambiente  $\mathbb{R}^3$ .

Fonte: Autor

Ao considerarmos funções de duas variáveis reais podemos obter espaços bidimensionais no ambiente  $\mathbb{R}^3$  com veremos a seguir.

**Exemplo 3.5.** O Parabolóide  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = x^2 + y^2\}$  pode ser dotado com a estrutura de espaço vetorial fornecida pelo Teorema 3.1. É imediato ver que  $W = G(T)$  onde  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é a função definida por  $T(x, y) = x^2 + y^2$ . Geometricamente  $W$  é está representado na Figura 3.5

Figura 3.5. Descrição geométrica do espaço  $W$ .

Fonte: Autor

#### 4. Novas estruturas de espaços vetoriais do tipo gráfico

Nesta seção apresentaremos novas estruturas de espaços vetoriais do tipo gráfico considerando bijeções no espaço domínio de uma transformação. Em particular, utilizando translações, vamos ver que podemos obter estruturas nas quais o vetor nulo pode ser qualquer elemento do gráfico pré-fixado.

A respeito das novas estruturas de espaço vetorial para conjuntos do tipo gráfico, apresentamos o seguinte teorema.



**Teorema 4.1.** *Seja  $T : E \rightarrow X$  uma transformação e  $\varphi : E \rightarrow E$  uma bijeção. Então, o conjunto*

$$W = G(T) = \{(v, T(v)); v \in E\}$$

*possui uma estrutura de espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas por*

$$\begin{aligned}(u, T(u)) \oplus (v, T(v)) &= (\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)), T(\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)))) \\ \lambda \odot (u, T(u)) &= (\varphi(\lambda\varphi^{-1}(u)), T(\varphi(\lambda\varphi^{-1}(u))))\end{aligned}$$

*Demonstração.* Vamos verificar que são satisfeitas as propriedades de espaços vetoriais.

Dados  $\mathbf{u} = (u, T(u))$ ,  $\mathbf{v} = (v, T(v))$  e  $\mathbf{w} = (w, T(w))$  em  $G(T)$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , temos:

- Associatividade

$$\begin{aligned}[\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}] \oplus \mathbf{w} &= (\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)), T(\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)))) \oplus (w, T(w)) \\ &= (\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)) + \varphi^{-1}(w)), T(\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)) + \varphi^{-1}(w))) \\ &= (u, T(u)) \oplus (\varphi(\varphi^{-1}(v) + \varphi^{-1}(w)), T(\varphi(\varphi^{-1}(v) + \varphi^{-1}(w)))) \\ &= (u, T(u)) \oplus [(v, T(v)) \oplus (w, T(w))] \\ &= \mathbf{u} \oplus [\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}].\end{aligned}$$

- Comutatividade

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} &= (\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)), T(\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)))) \\ &= (\varphi(\varphi^{-1}(v) + \varphi^{-1}(u)), T(\varphi(\varphi^{-1}(v) + \varphi^{-1}(u)))) \\ &= (v, T(v)) \oplus (u, T(u)) \\ &= \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}.\end{aligned}$$

- Existência de elemento neutro. Vamos mostrar que  $(\varphi(0), T(\varphi(0)))$  é o elemento neutro de  $W$ . De fato:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \oplus (\varphi(0), T(\varphi(0))) &= (\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(\varphi(0))), T(\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(\varphi(0)))) \\ &= (\varphi(\varphi^{-1}(u) + 0), T(\varphi(\varphi^{-1}(u) + 0))) \\ &= (u, T(u)) = \mathbf{u}\end{aligned}$$

- Existência de elemento simétrico.

Vamos mostrar que  $(-\mathbf{u}) = (\varphi(-\varphi^{-1}(u)), T(\varphi(-\varphi^{-1}(u))))$  é o elemento simétrico de  $u \in W$ . De fato:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{u}) &= (\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(\varphi(-\varphi^{-1}(u)))), T(\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(\varphi(-\varphi^{-1}(u))))) \\ &= (\varphi(\varphi^{-1}(u) - \varphi^{-1}(u)), T(\varphi(\varphi^{-1}(u) - \varphi^{-1}(u)))) \\ &= (\varphi(0), T(\varphi(0))).\end{aligned}$$

- Associatividade

$$\begin{aligned}(\alpha.\beta) \odot \mathbf{u} &= (\varphi((\alpha.\beta).\varphi^{-1}(u)), T(\varphi((\alpha.\beta).\varphi^{-1}(u)))) \\ &= (\varphi(\alpha.(\beta.\varphi^{-1}(u))), T(\varphi(\alpha.(\beta.\varphi^{-1}(u))))) \\ &= \alpha \odot ((\varphi(\beta.\varphi^{-1}(u)), T(\varphi(\beta.\varphi^{-1}(u)))) \\ &= \alpha \odot (\beta \odot (u, T(u))) \\ &= \alpha \odot (\beta \odot \mathbf{u}).\end{aligned}$$

• Distributividade

$$\begin{aligned}
 (\alpha + \beta) \odot \mathbf{u} &= (\varphi((\alpha + \beta) \cdot \varphi^{-1}(u)), T(\varphi((\alpha + \beta) \cdot \varphi^{-1}(u)))) \\
 &= (\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(u) + \beta \cdot \varphi^{-1}(u)), T(\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(u) + \beta \cdot \varphi^{-1}(u)))) \\
 &= (\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(u))) + \varphi^{-1}(\varphi(\beta \cdot \varphi^{-1}(u))), T(\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(u))) \\
 &\quad + \varphi^{-1}(\varphi(\beta \cdot \varphi^{-1}(u))))) \\
 &= (\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(u)), T(\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(u)))) \oplus (\varphi(\beta \cdot \varphi^{-1}(u)), T(\varphi(\beta \cdot \varphi^{-1}(u)))) \\
 &= \alpha \odot (u, T(u)) \oplus \beta \odot (u, T(u)) \\
 &= \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \beta \odot \mathbf{u}.
 \end{aligned}$$

• Distributividade

$$\begin{aligned}
 \alpha \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) &= \alpha \odot (\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)); T(\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)))) \\
 &= (\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v))))); T(\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v))))) \\
 &= (\varphi(\alpha \cdot (\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v))), T(\varphi(\alpha \cdot (\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v))))) \\
 &= (\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(u) + \alpha \cdot \varphi^{-1}(v)), T(\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(u) + \alpha \cdot \varphi^{-1}(v)))) \\
 &= (\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(u))) + \varphi^{-1}(\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(v))), T(\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(u))) \\
 &\quad + \varphi^{-1}(\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(v))))) \\
 &= (\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(u)), T(\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(u)))) \oplus (\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(v)), T(\varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(v)))) \\
 &= \alpha \odot (u, T(u)) \oplus \alpha \odot (v, T(v)) \\
 &= \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \alpha \odot \mathbf{v}.
 \end{aligned}$$

• Multiplicação pela unidade.

$$1 \odot (u, T(u)) = (u, T(u)), \text{ para qualquer } (u, T(u)) \in W.$$

De fato:

$$\begin{aligned}
 1 \odot (u, T(u)) &= (\varphi(1 \cdot \varphi^{-1}(u)), T(\varphi(1 \cdot \varphi^{-1}(u)))) \\
 &= (\varphi(\varphi^{-1}(u)), T(\varphi(\varphi^{-1}(u)))) \\
 &= (u, T(u)).
 \end{aligned}$$

□

Observe que, se considerarmos a construção dada por Lopes em [5], o Teorema 4.1 torna-se um caso especial do Teorema 3.1.

**Corolário 4.1.** *Sejam  $T : E \rightarrow X$  uma aplicação do espaço vetorial  $E$  no conjunto não-vazio  $X$  e  $(v, T(v)) \in G(T)$  um elemento pré-fixado. Então,  $G(T)$  possui uma estrutura de espaço vetorial na qual  $(v, T(v))$  é o vetor nulo e o simétrico do vetor  $(u, T(u))$  nessa estrutura é o vetor  $(2v - u, T(2v - u))$ .*

*Demonstração.* Basta ver que a translação  $\varphi : E \rightarrow E$  definida por  $\varphi(x) = x + v$  é uma bijeção e  $\varphi(0) = v$ . Além disso,  $\varphi(-\varphi^{-1}(u)) = \varphi(-(u - v)) = \varphi(v - u) = 2v - u$ . □

Na verdade, existem muitas estruturas de espaço vetorial para o gráfico  $G(T)$  tais que o vetor nulo seja  $(v, T(v))$ .

Utilizando as funções seno e cosseno, apresentamos o seguinte exemplo.

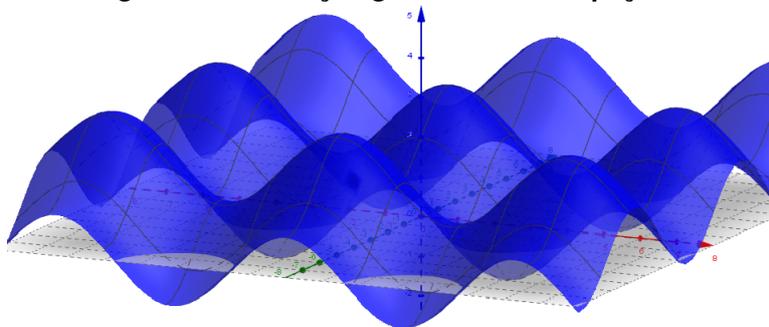
**Exemplo 4.1.** O conjunto  $W = \{(x, y, \cos(x) + \sin(y) + 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$  é o gráfico da aplicação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $T(x, y) = \cos(x) + \sin(y) + 1$ . Com a estrutura dada pelo Teorema 3.1, o vetor nulo de  $W$  é o elemento  $0 = (0, 0, 2)$  e o simétrico de  $u = (x, y, \cos(x) + \sin(y) + 1)$  é o elemento  $-u = (-x, -y, \cos(x) - \sin(y) + 1)$ . Utilizando a aplicação  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\varphi(x, y) = 2(x, y) + (\pi, \pi)$  e o Teorema 4.1, obtemos uma estrutura de espaço vetorial para  $W$  cujas operações são dadas por

$$u \oplus v = (x + z - \pi, y + w - \pi, -\cos(x + z) - \sin(y + w) + 1)$$

$$\lambda \odot u = ((1 - \lambda)\pi + \lambda x, (1 - \lambda)\pi + \lambda y, -\cos(\lambda(x - \pi)) - \sin(\lambda(y - \pi)) + 1),$$

onde  $u = (x, y, \cos(x) + \sin(y) + 1)$  e  $v = (z, w, \cos(z) + \sin(w) + 1)$ . Com esta nova estrutura, o vetor nulo de  $W$  é o elemento  $(\pi, \pi, 0)$  e o simétrico de  $u = (x, y, \cos(x) + \sin(y) + 1)$  é o elemento  $-u = (2\pi - x, 2\pi - y, \cos(x) - \sin(y) + 1)$ . Na Figura 4.1 temos uma descrição geométrica de  $W$ .

Figura 4.1. Descrição geométrica do espaço  $W$ .



Fonte: Autor

**Exemplo 4.2.** Seja

$$W = \{(x, y, \sqrt{x^2 + y^2 - 1}) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y)\| \geq 1\} \cup \{(x, y, -2) \mid \|(x, y)\| < 1\}.$$

Veja que  $W = G(T)$  onde  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por

$$T(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 1}, & x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ -2, & x^2 + y^2 - 1 < 0. \end{cases}$$

Geometricamente  $W$  está descrito na Figura 4.2.

Para colocar uma estrutura de espaço vetorial em  $W$  na qual o vetor nulo seja  $0 = (2, 3, 2\sqrt{3})$  vamos considerar a aplicação  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\varphi(x, y) = (x + 2, y + 3)$ . É claro que  $S$  é bijetiva e  $\varphi^{-1}(x, y) = (x - 2, y - 3)$ . Utilizando a bijeção  $\varphi$  e o Teorema 4.1 obtemos as seguintes operações em  $W$ .

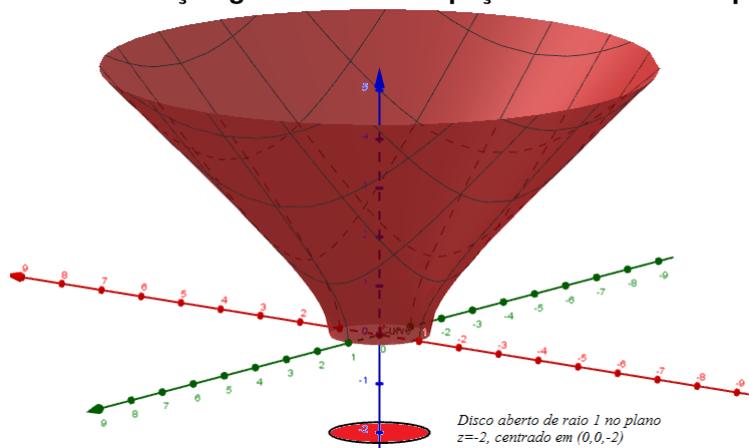
$$(x, y, T(x, y)) \oplus (z, w, f(z, w)) = (x + z - 2, y + w - 3, f(x + z - 2, y + w - 3)).$$

$$\lambda \odot (x, y, T(x, y)) = (\lambda(x - 2) + 2, \lambda(y - 3) + 3, T(\lambda(x - 2) + 2, \lambda(y - 3) + 3)).$$

É imediato ver que, com essa estrutura, o vetor nulo de  $W$  é o vetor  $0 = (2, 3, 2\sqrt{3})$ .

Uma observação pertinente é que se  $\varphi : E \rightarrow E$  é uma transformação linear então  $\varphi(0) = 0$ . Também segue da linearidade de  $S$  que  $\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)) = u + v$  e  $\varphi(\lambda\varphi^{-1}(u)) = \lambda u$ . Isso mostra que a estrutura de espaço vetorial fornecida pelo Teorema 4.1 é invariante por transformações lineares. Além disso, a referida estrutura coincide com aquela fornecida pelo Teorema 3.1. Por outro lado, se  $\varphi : E \rightarrow E$  é uma bijeção tal que  $\varphi(0) = 0$  não podemos garantir a invariância da estrutura de espaço vetorial.

Figura 4.2. Descrição geométrica do espaço vetorial do Exemplo 4.2



Fonte: Autor

## 5. Subespaços vetoriais do tipo gráfico

Nesta seção vamos estudar os subespaços vetoriais de um espaço do tipo gráfico.

Como já sabemos da teoria da álgebra linear se  $W$  é um subespaço não-trivial de um espaço vetorial de dimensão  $n$  e se  $s$  é a dimensão de  $W$ , então  $s \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . No caso de  $\mathbb{R}^n$  os subespaços de dimensão  $s = 1$  são retas que passam pela origem. Ainda no caso de  $\mathbb{R}^n$ , se  $s = 2$  então  $W$  é um plano que passa pela origem. Mas, o que podemos falar da geometria dos subespaços dos espaços do tipo gráfico?

Vamos ressaltar aqui que os espaços do tipo gráfico que estamos estudando habitam em algum espaço  $\mathbb{R}^n$ . No entanto, em geral, eles não são subespaços de  $\mathbb{R}^n$ . Outro fato que destacamos é que os subespaços usuais do espaço  $\mathbb{R}^n$  também são subespaços do tipo gráfico. Sendo assim, casos particulares dos exemplos que construímos neste trabalho.

**Exemplo 5.1.** O subespaço  $W = \{(x, 2x); x \in \mathbb{R}\}$  é um subespaço unidimensional do espaço  $\mathbb{R}^2$ . Note que  $W$  é um subespaço do tipo gráfico, pois  $W = G(T)$  onde  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por  $T(x) = 2x$ .

**Exemplo 5.2.** Em  $\mathbb{R}^3$  um plano que passa pela origem é um subespaço vetorial. Por exemplo, o plano  $W = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$  é o gráfico da função  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $T(x, y) = 0$ .

Pelas construções dadas nos Teoremas 3.1 e 4.1, uma reta  $r$  que não passa pela origem  $(0, 0)$  de  $\mathbb{R}^2$  possui uma estrutura de espaço vetorial por ser o gráfico de alguma função  $T$ . Um questionamento pertinente é saber se o espaço vetorial  $r = G(T)$  pode tornar-se um subespaço de  $\mathbb{R}^2$  com operações de adição e multiplicação por escalar adequadas, isto é, subespaço de  $\mathbb{R}^2$  com uma nova estrutura de espaço vetorial. No seguinte resultado mostramos que toda reta em  $\mathbb{R}^2$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^2$  mesmo que não passe pelo ponto  $(0, 0)$ . Em [5], Lopes apresenta uma nova estrutura de espaço vetorial para o conjunto  $\mathbb{R}^2$ , utilizando bijeções.

**Teorema 5.1.** Seja  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma bijeção. Então, as operações

$$\begin{aligned}(x, y) \oplus (z, w) &= (x + z, \varphi(\varphi^{-1}(y) + \varphi^{-1}(w))) \\ \lambda \odot (x, y) &= (\lambda x, \varphi(\lambda \varphi^{-1}(y)))\end{aligned}$$

definem uma nova estrutura de espaço vetorial para  $\mathbb{R}^2$ . Além disso, tem-se que  $W = \{(ax, \varphi(x\varphi^{-1}(b))); a, b \in \mathbb{R}\}$  torna-se um subespaço vetorial de  $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ . Em particular, se  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por  $T(x) = \varphi(\frac{x}{a}\varphi^{-1}(b))$  com  $a \neq 0$ , então  $W = G(T)$ .

**Demonstração.** A prova de que  $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$  é um espaço vetorial é essencialmente a mesma dada por Lopes em [5]. Resta verificar que  $W$  é subespaço vetorial de  $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ . Dados  $u = (ax, \varphi(x\varphi^{-1}(b)))$  e  $v = (az, \varphi(z\varphi^{-1}(b)))$  em  $W$  temos que:

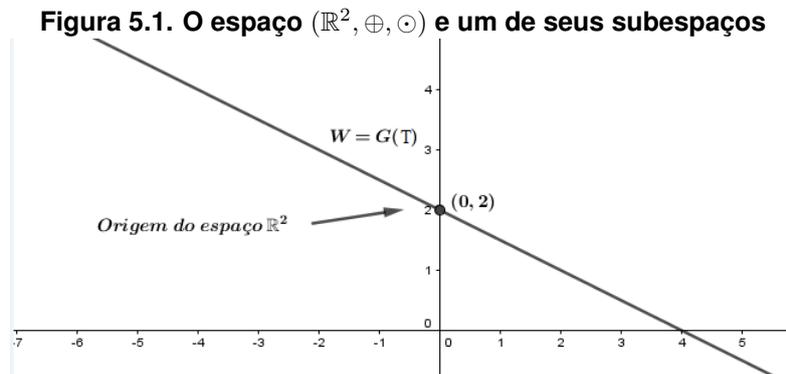
i)  $u \oplus v = (ax + az, \varphi(\varphi^{-1}(\varphi(x\varphi^{-1}(b))) + \varphi^{-1}(\varphi(z\varphi^{-1}(b)))) = (ay, \varphi(y\varphi^{-1}(b))) \in W$ , onde  $y = x + z$ .

ii)  $\lambda \odot u = (\lambda ax, \varphi(\lambda\varphi^{-1}(\varphi(x\varphi^{-1}(b)))) = (a\lambda x, \varphi(\lambda x\varphi^{-1}(b))) \in W$ . Isso encerra a prova. □

**Exemplo 5.3.** Seja  $\mathbb{R}^2$  com as operações de adição de vetores e multiplicação de vetores por escalar definidas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} (x, y) \oplus (z, w) &= (x + z, y + w - 2) \\ \lambda \odot (x, y) &= (\lambda x, \lambda(y - 2) + 2). \end{aligned}$$

Essas operações foram construídas utilizando-se o Teorema 5.1 e a bijeção  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\varphi(x) = x + 2$ . Note que o vetor nulo de  $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$  é o elemento  $0 = (0, 2)$ . Na Figura 5.1 a seguir vemos o espaço  $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$  e seu subespaço  $W = G(T)$  onde  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $T(x) = -\frac{x}{2} + 2$ .



Fonte: Autor

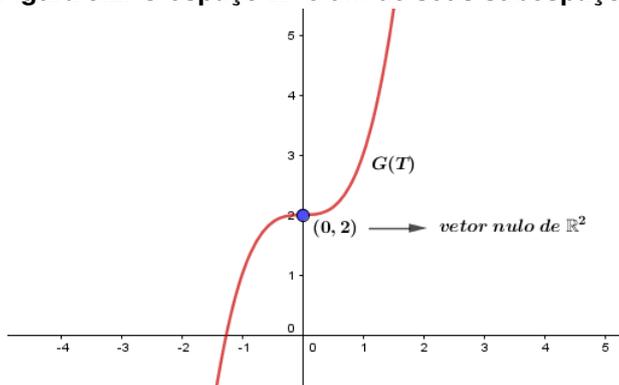
**Exemplo 5.4.** Seja  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $T(x) = x^3 + 2$ . O gráfico  $G(T)$  é um espaço vetorial com as operações adequadas, mas  $G(T)$  não é subespaço de  $\mathbb{R}^2$  com as operações usuais. No entanto, fazendo uso do Teorema 5.1,  $G(T)$  torna-se um subespaço de  $\mathbb{R}^2$  com as operações definidas por

$$\begin{aligned} (x, y) \oplus (z, w) &= (x + z, ((\sqrt[3]{y - 2} + \sqrt[3]{w - 2})^3 + 2)) \\ \lambda \odot (x, y) &= (\lambda x, \lambda^3(y - 2) + 2). \end{aligned}$$

É fácil ver que o subespaço gerado por qualquer elemento da forma  $(0, b)$  com  $b \neq 2$  é o eixo dos  $y$ . Por outro lado, se  $(a, b)$  é um elemento com  $a \neq 0$ , então  $x \odot (a, b) =$

$(ax, x^3(b-2)+2)$ . Isso, significa que o subespaço gerado pelo elemento  $(a, b)$  é gráfico da aplicação  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $H(x) = \frac{(b-2)}{a^3}x^3 + 2$ . Em particular,  $(a, b) = (1, 3)$  constitui uma base para o subespaço  $G(T)$  deste exemplo. A Figura 5.2 mostra o espaço  $\mathbb{R}^2$  e seu subespaço  $G(T)$ .

**Figura 5.2. O espaço  $\mathbb{R}^2$  e um de seus subespaços.**



Fonte: Autor

No exemplo a seguir vamos estudar os subespaços do parabolóide dado no Exemplo 3.5. Afinal, geometricamente o que são esses subespaços?

**Exemplo 5.5.** Vamos considerar o parabolóide  $W = \{x, y, x^2 + y^2\}; x, y \in \mathbb{R}$  com as operações definidas pelo Teorema 3.1. Como  $W$  possui dimensão  $n = 2$ , seus subespaços não-triviais possuem dimensão  $s = 1$ . Se  $u = (a, b, a^2 + b^2)$  é um vetor não-nulo em  $W$ , então o subespaço  $S$  gerado por  $u$  é dado por  $S = \{x \odot u; x \in \mathbb{R}\}$ . Vamos procurar entender o que é, geometricamente, o subespaço  $S$ . Note que

$$x \odot u = x \odot (a, b, a^2 + b^2) = (ax, bx, (a^2 + b^2)x^2).$$

Geometricamente temos dois pontos de vista a considerar: do ponto de vista de  $W$ ,  $S$  é a reta que passa pelos pontos  $0 = (0, 0, 0)$  e  $A = (a, b, a^2 + b^2)$ . Do ponto de vista do ambiente  $\mathbb{R}^3$ ,  $S$  é uma parábola. Por exemplo, se  $A = (1, 2, 5)$  então  $S = \{(x, 2x, 5x^2); x \in \mathbb{R}\}$  é uma parábola em  $\mathbb{R}^3$ . No entanto, do ponto de vista de  $W$ , é a reta que passa na origem de  $W$  e pelo ponto  $(1, 2, 5)$ , visto que  $S = \{(1-x) \odot (0, 0, 0) \oplus x \odot (1, 2, 5); x \in \mathbb{R}\}$ , em consonância com a definição 2.3. Na Figura 5.3 temos uma descrição geométrica de  $S$ .

O subespaço  $S$  também é do tipo gráfico, pois  $S = G(h)$  onde  $h$  é a restrição da função  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $T(x, y) = x^2 + y^2$ , ao conjunto  $D = \{(x, 2x); x \in \mathbb{R}\}$ .

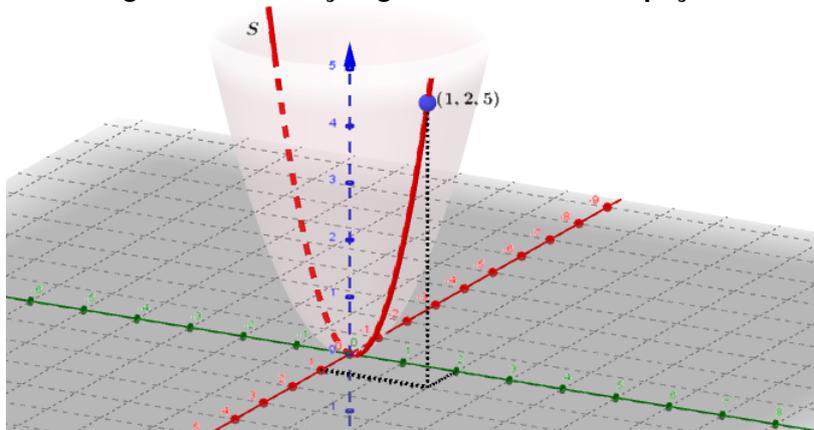
De modo geral, os subespaços de dimensão  $s = 1$  em um espaço do tipo gráfico são retas passando pela origem do espaço, assim como acontece nos espaços  $\mathbb{R}^n$ .

Para o nosso próximo resultado vamos considerar um espaço vetorial  $(E, +, \cdot)$  e  $\varphi : E \rightarrow E$  uma bijeção. Conforme pode ser visto em [5], as operações  $\boxplus$  e  $\boxtimes$  definidas em  $E$  por

$$u \boxplus v = \varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)) \tag{1}$$

$$\lambda \boxtimes u = \varphi(\lambda \varphi^{-1}(u)) \tag{2}$$

Figura 5.3. Descrição geométrica do subespaço  $S$



Fonte: Autor

tornam  $(E, \boxplus, \boxminus)$  um novo espaço vetorial. Neste contexto, as operações definidas para  $G(T)$  no Teorema 4.1 tornam-se  $(u, T(u)) \oplus (v, T(v)) = (u \boxplus v, T(u \boxplus v))$  e  $\lambda \odot (u, T(u)) = (\lambda \boxminus u, T(\lambda \boxminus u))$ . No seguinte teorema estaremos considerando  $G(T)$  com as operações  $\boxplus$  e  $\boxminus$  em conformidade com o Teorema 4.1, estando implícita a bijeção  $\varphi : E \rightarrow E$ .

**Teorema 5.2.** *Sejam  $T : E \rightarrow X$  uma aplicação do espaço vetorial  $(E, +, \cdot)$  no conjunto não-vazio  $X$  e  $W = G(T)$  um espaço vetorial do tipo gráfico. Então,  $S$  é subespaço vetorial de  $W$  se, e somente se,  $\pi_1(S)$  é subespaço vetorial de  $(E, \boxplus, \boxminus)$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $S$  seja subespaço vetorial de  $W = G(T)$ . Se  $u, v \in \pi_1(S)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então  $(u, T(u)), (v, T(v)) \in S$ . Como  $S$  é subespaço vetorial de  $W$ , segue que  $(u, T(u)) \oplus (v, T(v)) = (u \boxplus v, T(u \boxplus v)) \in S$ , isto é,  $u \boxplus v \in \pi_1(S)$ . Analogamente,  $\lambda \boxminus u \in \pi_1(S)$ . Portanto,  $\pi_1(S)$  é subespaço vetorial de  $(E, \boxplus, \boxminus)$ . Reciprocamente, se  $\pi_1(S)$  é subespaço vetorial de  $(E, \boxplus, \boxminus)$  então, dados  $w_1, w_2 \in S$ , existem  $u, v \in E$  tais que  $w_1 = (u, T(u))$  e  $w_2 = (v, T(v))$ . Segue que  $u, v \in \pi_1(S)$  e como  $\pi_1(S)$  é subespaço vetorial de  $(E, \boxplus, \boxminus)$ , resulta que  $u \boxplus v \in \pi_1(S)$  e portanto obtemos que  $(u \boxplus v, T(u \boxplus v)) \in S$ . De modo similar obtemos que  $(\lambda \boxminus u, T(\lambda \boxminus u)) \in S$ . Isso conclui a prova da teorema.  $\square$

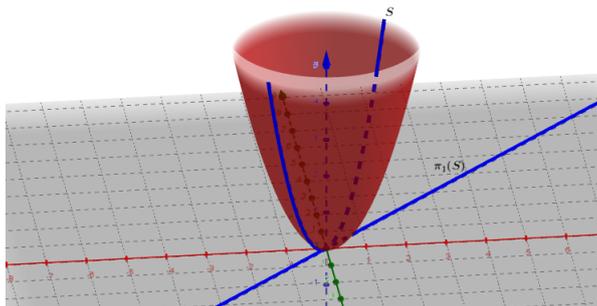
**Exemplo 5.6.** *Na Figura 5.4 temos uma descrição do subespaço  $S = [(1, 1, 2)]$  do parabolóide descrito no Exemplo 3.5 e o subespaço  $\pi_1(S)$  do espaço  $\mathbb{R}^2$ .*

### 5.1. Subespaços ortogonais

Dada uma aplicação  $T : E \rightarrow X$  do espaço vetorial  $E$  no conjunto não-vazio  $X$ , podemos introduzir um produto interno no espaço vetorial  $G(T)$  desde que o espaço  $E$  esteja munido de um produto interno. Após introduzirmos esse produto interno vamos estudar os subespaços ortogonais de  $G(T)$ .

Seja  $E$  um espaço vetorial com um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ . A aplicação  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{G(T)} : G(T) \times G(T) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\langle (u, T(u)), (v, T(v)) \rangle_{G(T)} = \langle u, v \rangle_E$  define um produto interno em  $G(T)$ . Vamos chamar esse produto interno de produto interno induzido.

**Figura 5.4.** Um subespaço  $S$  tipo gráfico e sua projeção  $\pi_1(S)$ .



Fonte: Autor

**Proposição 5.1.** *Sejam  $E = (E, +, \cdot)$  um espaço vetorial com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$  e  $\varphi : E \rightarrow E$  uma bijeção. Se  $\mathbf{E} = (E, \boxplus, \boxminus)$  é o espaço vetorial cujas operações estão definidas pelas equações (1) e (2), então a função  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\langle u, v \rangle_{\mathbf{E}} := \langle \varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v) \rangle_E$  para quaisquer  $u, v \in \mathbf{E}$ , define um produto interno em  $\mathbf{E}$ .*

*Demonstração.* Sejam  $u, v, w \in \mathbf{E}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Então:

i)

$$\begin{aligned} \langle u \boxplus v, w \rangle_{\mathbf{E}} &= \langle \varphi^{-1}(u \boxplus v), \varphi^{-1}(w) \rangle_E \\ &= \langle \varphi^{-1}[\varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v))], \varphi^{-1}(w) \rangle_E \\ &= \langle \varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v), \varphi^{-1}(w) \rangle_E \\ &= \langle \varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(w) \rangle_E + \langle \varphi^{-1}(v), \varphi^{-1}(w) \rangle_E \\ &= \langle u, w \rangle_{\mathbf{E}} + \langle v, w \rangle_{\mathbf{E}}. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \langle \lambda \boxminus u, w \rangle_{\mathbf{E}} &= \langle \varphi^{-1}(\lambda \boxminus u), \varphi^{-1}(w) \rangle_E \\ &= \langle \varphi^{-1}[\varphi(\lambda \cdot \varphi^{-1}(u))], \varphi^{-1}(w) \rangle_E \\ &= \langle \lambda \cdot \varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(w) \rangle_E \\ &= \lambda \langle \varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(w) \rangle_E \\ &= \lambda \langle u, w \rangle_{\mathbf{E}}. \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} \langle u, w \rangle_{\mathbf{E}} &= \langle \varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(w) \rangle_E \\ &= \langle \varphi^{-1}(w), \varphi^{-1}(u) \rangle_E \\ &= \langle w, u \rangle_{\mathbf{E}} \end{aligned}$$

iv)

$$\langle u, u \rangle_{\mathbf{E}} = \langle \varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(u) \rangle_E \geq 0$$

e

$$\langle u, u \rangle_{\mathbf{E}} > 0 \Leftrightarrow \langle \varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(u) \rangle_E > 0 \Leftrightarrow \varphi^{-1}(u) \neq 0 \Leftrightarrow u \neq 0.$$

O leitor pode consultar [5] para ver que se  $0 \in (E, +, \cdot)$  então  $\varphi(0)$  é o vetor nulo de  $(E, \boxplus, \boxminus)$ . Portanto, as propriedades de produto interno são verificadas e a proposição está demonstrada.  $\square$



Se  $G(T)$  possui um produto interno induzido, o que podemos dizer sobre a ortogonalidade entre seus subespaços? A respeito desse questionamento temos o seguinte teorema.

**Teorema 5.3.** *Seja  $E$  um espaço vetorial com produto interno e  $T : E \rightarrow X$  uma aplicação. Os subespaços  $W_1$  e  $W_2$  são ortogonais em  $G(T)$  com respeito ao produto interno induzido se, e somente se,  $\pi_1(W_1)$  e  $\pi_1(W_2)$  são ortogonais em  $E$ .*

*Demonstração.* Pelo Teorema 5.2 para cada  $i = 1, 2$ ,  $W_i$  é subespaço vetorial de  $G(T)$  se, e somente se,  $\pi_1(W_i)$  é subespaço vetorial de  $E$ . O resultado segue da definição de produto interno induzido.  $\square$

No próximo exemplo dotamos o espaço  $\mathbb{R}^2$  de uma nova estrutura de espaço vetorial utilizando uma translação. Essa nova estrutura é utilizada para munir o parabolóide de uma estrutura de espaço vetorial. Com essas estruturas o vetor nulo de  $\mathbb{R}^2$  passará a ser o elemento  $(0, 1)$  enquanto o vetor nulo do parabolóide passará a ser o elemento  $(0, 1, 1)$ . Por fim, estudaremos no referido exemplo, os subespaços vetoriais ortogonais.

**Exemplo 5.7.** *Sejam  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  o espaço  $\mathbb{R}^2$  com as operações usuais dotado do produto interno usual e  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a bijeção dada por  $\varphi(x, y) = (x, y) + (0, 1)$ . A bijeção  $\varphi$  define uma nova estrutura de espaço vetorial no conjunto  $\mathbb{R}^2$  através das operações:*

$$\begin{aligned}(x, y) \boxplus (z, w) &= (x + z, y + w - 1) \\ \lambda \boxtimes (x, y) &= (\lambda x, \lambda(y - 1) + 1).\end{aligned}$$

Considere em  $(\mathbb{R}^2, \boxplus, \boxtimes)$  o produto interno de dado na Proposição 5.1, isto é,

$$\langle (x, y), (z, w) \rangle_{\mathbb{R}^2} = xz + (y - 1)(w - 1).$$

Seja o espaço vetorial  $G(T)$ , gráfico da aplicação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $T(x, y) = x^2 + y^2$ . Vamos considerar  $G(T)$  com as operações

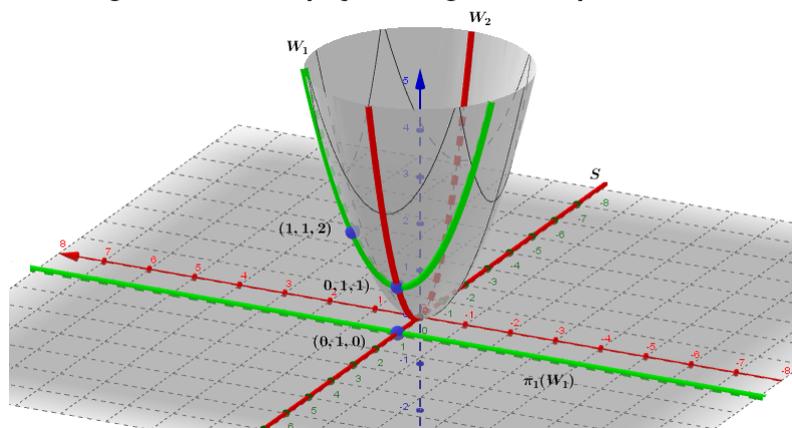
$$\begin{aligned}(x, y, T(x, y)) \oplus (z, w, T(z, w)) &= ((x, y) \boxplus (z, w), T((x, y) \boxplus (z, w))) \\ \lambda \odot (x, y, T(x, y)) &= (\lambda \boxtimes (x, y), T(\lambda \boxtimes (x, y))).\end{aligned}$$

Note que o vetor nulo de  $(\mathbb{R}^2, \boxplus, \boxtimes)$  é o elemento  $(0, 1)$  e o vetor nulo de  $(G(T), \oplus, \odot)$  é o elemento  $(0, 1, 1)$ . Se  $W_1$  é o subespaço de  $G(T)$  gerado pelo elemento  $(1, 1, 2)$ , então  $W_1 = \{(x, 1, x^2 + 1)\}$ . Como vimos no Teorema 5.2,  $\pi_1(W_1) = \{(x, 1); x \in \mathbb{R}\}$  é um subespaço de  $(\mathbb{R}^2, \boxplus, \boxtimes)$ . O subespaço  $S$  ortogonal a  $\pi_1(W_1)$  em  $\mathbb{R}^2$  é dado por  $S = \{(0, y); y \in \mathbb{R}\}$ . Ainda com as ideias do Teorema 5.2, obtemos que o subespaço  $W_2$  de  $G(T)$  ortogonal a  $W_1$  é dado por  $W_2 = \{(0, y, T(0, y)); y \in \mathbb{R}\} = \{(0, y, y^2); y \in \mathbb{R}\}$ . Note que

$$\langle (x, 1, x^2 + 1), (0, y, y^2) \rangle_{G(T)} = x \cdot 0 + (1 - 1)(y - 1) = 0.$$

Identificando  $S$  com  $S \times \{0\}$  e  $\pi_1(W)$  com  $\pi_1(W) \times \{0\}$  vemos, na Figura 5.5, uma descrição desses subespaços.

Figura 5.5. Subespaços ortogonais no parabolóide



Fonte: Autor

## 6. Considerações finais

No nosso trabalho apresentamos novos exemplos de espaços vetoriais tipo gráfico. Além disso, mostramos a possibilidade de munir o mesmo gráfico com muitas estruturas de espaços vetoriais. Em particular, o vetor nulo pode ser reescalado para ser qualquer elemento do gráfico. Nossos exemplos são de dimensões um e dois e foram dados utilizando os ambientes  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ . Os exemplos podem ser generalizados para qualquer dimensão finita. Além disso, mostramos que retas que não passam pelo elemento  $(0, 0)$  podem ser subespaços do  $\mathbb{R}^2$ , com as operações adequadas. Na verdade, isso também pode ser feito com o gráfico de funções bijetivas, isto é, gráficos de funções bijetivas podem ser subespaços do  $\mathbb{R}^2$  com uma estrutura adequada. A mesma discussão pode ser estendida para os espaços  $\mathbb{R}^n$ . Por fim, introduzimos um produto interno em espaços do tipo gráfico e analisamos os subespaços ortogonais em exemplos que são tratados neste trabalho. Acreditamos que nosso trabalho dá uma contribuição a mais na teoria dos espaços vetoriais de dimensão finita.

## Referências

- [1] **DORIER, Jean-Luc** *A general outline of the genesis of vector space theory* História da Matemática - 22, 227 - 261, 1995.
- [2] **LIMA, Elon Lages** *Álgebra linear. Coleção Matemática Universitária*. IMPA, 9.ed. Rio de Janeiro, 2018.
- [3] **STEINBRUCH, Alfredo, WINTERLE, Paulo** *Álgebra linear*. 2.ed. Pearson Makron Books, São Paulo, 1987.
- [4] **ANTON, Howard** *Álgebra linear com aplicações* [Recurso eletrônico] 10.ed - Dados eletrônicos - Porto Alegre, 2012
- [5] **LOPES, Tharine Antunes** *Uma conexão entre a Álgebra Linear e a Teoria dos Conjuntos* [Recurso eletrônico]. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/157201>>.