Resolução geométrica de equações do segundo grau: métodos que fazem uso de régua e compasso

Erika Eduarda A. Sousa[1], **Kelly Karina Santos**[2]

[1]Escola Estadual Lobo D'Almada - Boa Vista - RR

[2]Departamento de Matemática - Universidade Federal de Roraima - UFRR

erika.e.a.sousa@outlook.com, kelly.karina@ufrr.br

Abstract. *In this work we present a collection of geometric methods to solve quadratic equations which use ruler and compass, namely: methods of Euclids, Descartes, Leslie/Carlyle, Staudt and method of the tangents circles.*

Resumo. *Neste trabalho apresentamos uma coletânea de métodos de resolução geométrica de equações do segundo grau, que fazem uso de régua e compasso, a saber: os métodos de Euclides, os métodos de Descartes, Leslie/Carlyle, Staudt e o método das circunferências tangentes.*

1. Introdução

A resolução de equações do segundo grau, nas aulas de matemática no ensino fundamental e médio, normalmente faz-se com o uso apenas de métodos algébricos. No entanto, na história da busca de soluções para tais equações, há métodos geométricos muitas vezes desconhecidos. O objetivo deste trabalho é reunir os principais métodos geométricos para a resolução de equações do segundo grau que fazem uso de régua e compasso.

Os primeiros métodos que apresentaremos foram registrados por Euclides, em sua obra "Os Elementos"[EUCLIDES 2009]. Nela encontramos três proposições de construções geométricas que resolvem geometricamente equações do segundo grau, a saber: as proposições 28 e 29 do livro VI e a proposição 11 do livro II. As proposições serão apresentadas a princípio por uma tradução mais literal, de Irineu Bicudo, seguida de sua forma escrita em linguagem mais atual e algébrica. É importante destacar que os valores obtidos são, muitas vezes, uma aproximação da raiz. Isto ocorre porque estes métodos fazem uso de régua e compasso e ao final a raiz será representada pela medida de um segmento.

Acredita-se que a civilização grega tenha desenvolvido um tratamento geométrico de muitos problemas matemáticos, pela dificuldade com o tratamento dos números racionais e irracionais, falta de praticidade do sistema de numeração grego e pelo gosto natural pela Geometria [FRAGOSO 2000].

Em seguida apresentaremos o método de René Descartes, registrado em sua obra "La Géométrie"[DESCARTES 2008]. Nela Descartes apresentou uma solução geométrica para a obtenção da raiz positiva de uma equação do segundo grau do tipo: $x^2 - bx - c^2 = 0$, $x^2 + bx - c^2 = 0$ e $x^2 - bx + c^2 = 0$.

O próximo método foi registrado na obra “Elements of geometry”de Leslie [LESLIE 1817], juntamente com a observação: “A resolução desse importante problema agora inserido no texto foi-me sugerida pelo Sr. Thomas Carlyle, um jovem e engenhoso matemático, outrora meu aluno”[EVES 2002]. Denominaremos tal método portanto como Método de Leslie/Carlyle.

Apresentamos ainda um método desenvolvido por Karl Georg Christian von Staudt, para resolução geométrica de qualquer equação do segundo grau [DEMETSENAERE 2013].

Por último, e não menos importante, trazemos o método das circunferências tangentes. Nelson Tunala já o havia apresentado na revista do Professor de Matemática [TUNALA 1988].

Alguns métodos podem ser utilizados para qualquer equação do segundo grau, outros fazem restrições sobre seus coeficientes.

Espera-se, com este trabalho reunir os principais métodos de resolução geométrica que fazem o uso de régua e compasso para a resolução de equações do segundo grau, dando com isso maior visibilidade para os mesmos e quem sabe até mesmo contribuindo para que algum deles seja também ensinado em sala de aula, seja com o uso clássico de régua e compasso ou com o uso de algum softawe como o Geogebra.

2. Métodos Geométricos de Euclides

Os métodos geométricos apresentados a seguir são devido a Euclides em sua obra “Os Elementos”composta por 13 volumes. Aqui abordaremos as proposições 28 e 29 do livro VI e a proposição 11 do livro II. Estas proposições resolvem geométricas equações do segundo grau do tipo: $x^2 - px + q^2 = 0$, $x^2 - px - q^2 = 0$ e $x^2 + bx - b^2 = 0$, com p, q e b positivos, respectivamente.

2.1. Proposição 28 - Livro VI

Proposição 28 - Livro VI: “À reta dada aplicar, igual à retilínea dada, um paralelogramo deficiente por uma figura paralelogrâmica semelhante à dada; mas é preciso a retilínea dada [igual à qual é preciso aplicar] não ser maior do que a descrita sobre a metade, semelhante ao déficit [a tanto sobre a metade quanto à qual é preciso o déficit ser semelhante]”. [EUCLIDES 2009, p.261]

A proposição 28 pode ser reescrita da seguinte maneira:

“Dividir um segmento de reta de modo que o retângulo contido por suas partes tenha área igual a área de um quadrado dado, não excedendo este o quadrado sobre metade do segmento de reta dado.”[EVES 2002, p.111]

Algebricamente, x é a solução da equação $x(p - x) = q^2$, que é equivalente a

$$x^2 - px + q^2 = 0, \tag{1}$$

em que p e q são as medidas dos segmentos dados, com $q < \frac{p}{2}$.

A seguir apresentamos a resolução geométrica referente a proposição 28, listando o passo a passo da resolução e expondo a figura dessa construção.

Resolução Geométrica

Considere uma equação quadrática do tipo $x^2 - px + q^2 = 0$, com p e $q \in \mathbb{R}^+$:

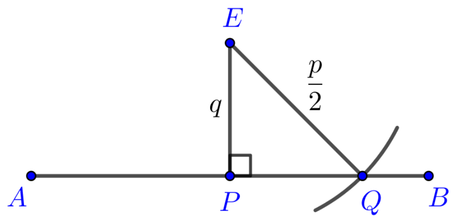
1°. Trace um segmento de reta AB de medida p.

2°. Por P, ponto médio de AB, levante uma reta perpendicular a AB e marque o ponto E sobre a reta de modo que $\overline{PE} = q$.

3°. Com centro E e raio $\overline{PB} = \frac{p}{2}$, trace um arco de circunferência e marque o ponto Q na interseção com AB.

4°. As medidas dos segmentos AQ e QB são as soluções da equação dada.

Figura 1. Figura da proposição 28 - livro VI.



Fonte: EVES, H. (2002), adaptada.

Para mostrar que $\overline{AQ}$ e $\overline{QB}$ são as soluções da equação (1), basta mostrar que $\overline{AQ} + \overline{QB} = p$ e $\overline{AQ}.\overline{QB} = q^2$.

Denotaremos $\overline{AQ} = r$ e $\overline{QB} = s$. Como $\overline{AQ} + \overline{QB} = \overline{AB}$ e $\overline{AB} = p$, então $r + s = p$.

Por outro lado, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo EPQ, obtemos

$$q^2 = \overline{EQ}^2 - \overline{PQ}^2. \tag{2}$$

Substituindo $\overline{EQ}$ por $\overline{PB}$ em (2) e sabendo que $\overline{PA} = \overline{PB}$, obtemos

$$q^2 = \overline{PB}^2 - \overline{PQ}^2 = (\overline{PB} + \overline{PQ}).(\overline{PB} - \overline{PQ}) = \overline{AQ}.\overline{QB} = r.s.$$

Portanto, como $r+s = p$ e $r.s = q^2$, segue-se que r e s são as soluções da equação (1).

Observe que as raízes da equação quadrática

$$x^2 + px + q^2 = 0 \tag{3}$$

são dadas por $-\overline{AQ}$ e $-\overline{QB}$.

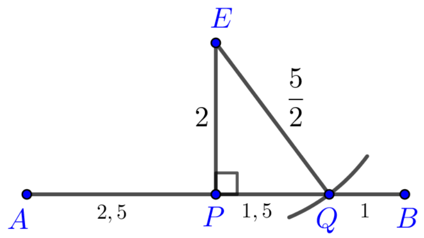
De fato, pondo $x = -r$ em (3), temos $(-r)^2 + p(-r) + q^2 = r^2 - pr + q^2 = 0$, onde a última igualdade decorre do fato de r ser raiz de (1). Portanto, $-r$ é solução de (3). Analogamente, verifica-se que $-s$ é solução de (3).

O exemplo a seguir traz uma aplicação do método.

Exemplo 2.1 *Resolva a equação $x^2 - 5x + 4 = 0$ pelo método de Euclides.*

Esta equação pode ser escrita como $x^2 - 5x + 2^2 = 0$, com $p = 5$ e $q = 2$, logo, podemos usar a resolução geométrica apresentada na proposição 28.

Figura 2. Resolução da equação $x^2 - 5x + 4 = 0$ pelo método de Euclides.



Fonte: Autor

Depois de fazermos as construções descritas, obtemos $\overline{AQ} = 4$ e $\overline{QB} = 1$. Assim, pela proposição 28, temos que 1 e 4 são as raízes de $x^2 - 5x + 4 = 0$.

2.2. Proposição 29 - Livro VI

Proposição 29 - Livro VI: “À reta dada aplicar, igual à retilínea dada, um paralelogramo excedente por uma figura paralelogrâmica semelhante à dada.”[EUCLIDES 2009, p.262]

Esta proposição pode ser reescrita como: “Prolongue um dado segmento de reta de modo que o retângulo contido pelo segmento estendido e a extensão seja igual a um quadrado dado.”[EVES 2002, p.112]

Algebricamente, escreve-se, x é a solução da equação $x(x - p) = q^2$, que é equivalente a

$$x^2 - px - q^2 = 0 \tag{4}$$

em que p e q são as medidas dos segmentos dados.

Resolução Geométrica

Considere uma equação quadrática do tipo $x^2 - px - q^2 = 0$, com p e $q \in \mathbb{R}^+$.

$1°$. Trace um segmento AB de medida p e marque o ponto médio P desse segmento.

$2°$. Por B levante uma reta perpendicular a AB e marque o ponto E sobre a reta de modo que $\overline{BE} = q$.

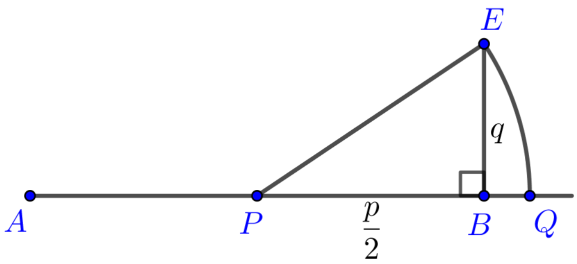
$3°$. Com centro P e raio $\overline{PE}$, trace um arco de circunferência e marque o ponto Q na interseção com o prolongamento de AB.

$4°$. $\overline{AQ}$ e $-\overline{BQ}$ são as raízes da equação dada. Veja a Figura 3.

Para mostrar que $\overline{AQ}$ e $-\overline{BQ}$ são as soluções de (4) usa-se o mesmo argumento usado na proposição anterior, ou seja, mostra-se que $\overline{AQ} - \overline{BQ} = p$ e $\overline{AQ}.(-\overline{BQ}) = -q^2$.

Denotando novamente, $\overline{AQ} = r$ e $\overline{BQ} = s$, observe que $\overline{AQ} - \overline{BQ} = \overline{AB}$ e assim $r - s = p$. Para o que falta, aplicamos o teorema de Pitágoras no triângulo PBE e procedemos de maneira similar à demonstração da proposição anterior.

Figura 3. Figura da proposição 29 - livro VI.



Fonte: EVES, H. (2002), adaptada.

Note que, as raízes da equação quadrática

$$x^2 + px - q^2 = 0 \tag{5}$$

são as mesmas de $x^2 - px - q^2 = 0$, apenas com sinais opostos.

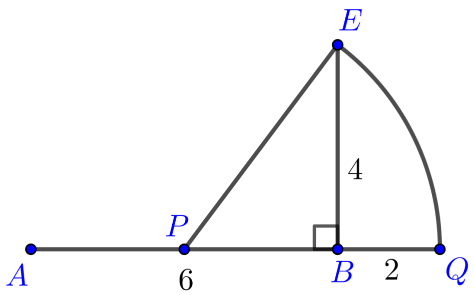
Veja a aplicação desse método no exemplo a seguir.

Exemplo 2.2 *Resolva a equação $x^2 - 6x - 16 = 0$ pelo método de Euclides.*

Esta equação pode ser escrita como $x^2 - 6x - 4^2 = 0$, com $p = 6$ e $q = 4$, neste caso, podemos utilizar o método da proposição 29 de Euclides.

Depois de fazer as devidas construções, já descritas, obtemos:

Figura 4. Resolução da equação $x^2 - 6x - 16 = 0$ pelo método de Euclides.



Fonte: Autor

Medindo os segmentos AQ e BQ verificamos que $\overline{AQ} = 8$ e $\overline{BQ} = 2$, como nesse caso as raízes são dadas por $\overline{AQ}$ e $-\overline{BQ}$, segue-se que 8 e -2 são as raízes de $x^2 - 6x - 16 = 0$.

2.3. Proposição 11 - Livro II

Proposição 11 - Livro II: “Cortar a reta dada, de modo a o retângulo contido pela inteira e por um dos segmentos ser igual ao quadrado sobre o segmento restante.”[EUCLIDES 2009, p.146]

Ou ainda, "Dividir uma linha reta em duas partes tais que o retângulo contido pelo todo e uma das partes tenha área igual à do quadrado sobre a outra parte."[PEDROSO 2010, p.5]

Algebricamente, escreve-se, x é a solução da equação $b(b-x) = x^2$, que é equivalente a

$$x^2 + bx - b^2 = 0, \tag{6}$$

onde b é a medida do segmento dado.

Resolução Geométrica

Considere uma equação quadrática do tipo $x^2 + bx - b^2 = 0$, $b \in \mathbb{R}^+$:

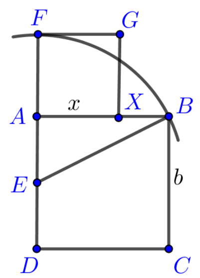
1°. Construa um quadrado $ABCD$ com lado de medida b e marque o ponto médio E de AD.

2°. Construa um arco de circunferência com centro em E e raio EB. Na interseção desse arco com o prolongamento de DA marque o ponto F.

3°. Construa o quadrado $AFGX$ no mesmo semiplano de BC.

4°. A medida do segmento AX desse quadrado pertencente ao segmento AB, é solução da equação dada.

Figura 5. Figura da proposição 11 - livro II.



Fonte: Revista do professor de matemática (2010), adaptada.

Para justificativa, observe que por construção, temos que o triângulo EAB é retângulo em A com $AB = b$ e $AE = \frac{b}{2}$, então, pelo teorema de Pitágoras temos que

$$\overline{EB} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AE}^2} = \sqrt{b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{b\sqrt{5}}{2}.$$

Por outro lado, sabendo que $\overline{EB} = \overline{EF}$ e fazendo $\overline{AX} = x$, temos

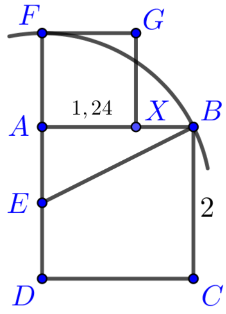
$$x = \overline{AX} = \overline{AF} = \overline{EF} - \overline{AE} = \overline{EB} - \overline{AE} = \frac{b\sqrt{5}}{2} - \frac{b}{2} = \frac{b(\sqrt{5}-1)}{2},$$

que é solução positiva de (6), o que pode ser facilmente verificado substituindo-se esse valor em (6).

Exemplo 2.3 *Resolva a equação $x^2 + 2x - 4 = 0$ pelo método de Euclides.*

Esta equação pode ser escrita como $x^2 + 2x - 2^2$, com $b = 2$, assim, podemos usar a proposição 11 para resolver a equação dada.

Figura 6. Resolução da equação $x^2 + 2x - 4 = 0$ pelo método de Euclides.



Fonte: Autor

Após realizarmos as construções devidas, medindo o segmento AX, obtemos que $\overline{AX} = 1,24$. Claramente trata-se de uma aproximação da raiz positiva da equação, cujo valor sabemos que é $\sqrt{5} - 1$. Vale lembrar que os valores eram obtidos por medição e por este motivo é natural que os resultados fossem aproximações das raízes.

3. Método de Descartes

O próximo método geométrico é devido a René Descartes (1596-1650). De acordo com Pedroso (2010), Descartes expôs no apêndice *"La géométrie"* de sua obra *"O Discurso do Método"* uma solução geométrica para obter a raiz positiva de uma equação do 2° grau. Este método resolve geometricamente as equações do tipo: $x^2 - bx - c^2 = 0$, $x^2 + bx - c^2 = 0$ e $x^2 - bx + c^2 = 0$, com b e c positivos. Segundo Wagner (1991), Descartes escrevia, por exemplo a equação de uma reta como $ax + by = c^2$ e não $ax + by = c$ como hoje. Para ele, cada letra, constante ou variável, representava a medida de um segmento de reta. No caso em questão, para as equações do segundo grau descritas acima, Descartes assumia que c representava um segmento de reta.

1° Caso: Equação do tipo $x^2 - bx - c^2 = 0$

Resolução Geométrica

Considere uma equação quadrática do tipo $x^2 - bx - c^2 = 0$ com b e $c \in \mathbb{R}^+$:

1°. Trace um segmento de reta AB medindo c.

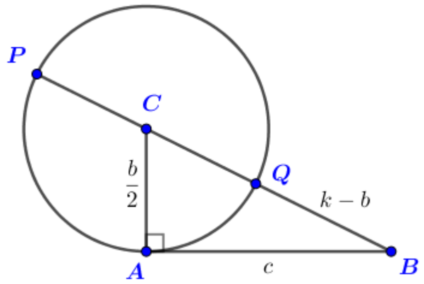
2°. Por A levante uma reta perpendicular ao segmento AB e marque o ponto C sobre ela de modo que $\overline{AC} = b/2$.

3°. Construa uma circunferência de centro C e raio $\overline{AC}$.

4°. Trace uma reta passando por B e C e marque os pontos P e Q nas interseções dessa reta com a circunferência.

5°. A medida do segmento PB é a solução positiva da equação dada. Veja a Figura 7.

Figura 7. Figura do Método de Descartes, 1° **Caso.**



Fonte: PEDROSO, H. A. (2010), adaptada.

Com efeito, se $\overline{PB}=k$ então, $\overline{BC}=k-\frac{b}{2}$. Pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo ABC, temos:

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= \overline{AC}^2+\overline{AB}^2\\ \left(k-\frac{b}{2}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2}\right)^2+c^2\\ k^2-bk+\frac{b^2}{4} &= \frac{b^2}{4}+c^2\\ k^2-bk-c^2 &= 0.\end{aligned}$$

Logo, $\overline{PB}$ é a raiz positiva da equação.

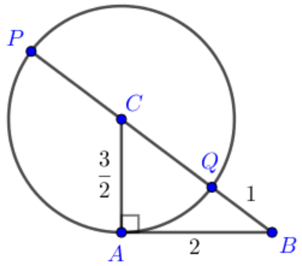
Segundo Fragoso (2000), a raiz negativa é representada por $-\overline{BQ}$, porém Descartes não a considerava.

De fato, substituindo $b-k$ na equação $x^2-bx-c^2=0$ encontramos uma sentença verdadeira.

Exemplo 3.1 *Resolva a equação* $x^2-3x-4=0$ *pelo método de Descartes.*

Reescrevendo a equação dada tem-se $x^2-3x-2^2=0$. Note que ela é do tipo $x^2-bx-c^2=0$, com $b=3$ e $c=2$, logo podemos resolver pela método de Descartes.

Figura 8. Resolução da equação $x^2-3x-4=0$ **pelo método de Descartes,** 1° **Caso.**



Fonte: Autor

Após realizarmos as construções, já descritas, encontramos $\overline{PB}=4$ e $\overline{BQ}=1$. Portanto, as raízes são 4 e -1.

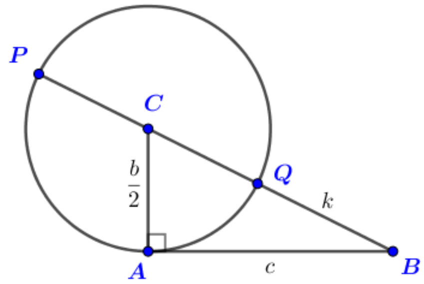
$2°$ Caso: Equação do tipo $x^2 + bx - c^2 = 0$

Resolução Geométrica

Considere uma equação quadrática do tipo $x^2 + bx - c^2 = 0$, $b, c \in \mathbb{R}^+$:

A resolução geométrica é igual ao $1°$ caso, no entanto agora, a medida do segmento BQ representa a solução positiva da equação dada. Veja a Figura 9.

Figura 9. Figura do Método de Descartes, $2°$ Caso.



Fonte: PEDROSO, H. A. (2010), adaptada.

Para a verificação basta aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC.

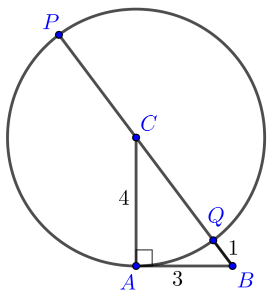
A solução negativa é dada por $-\overline{PB}$.

De fato, substituindo $-b - k$ na equação $x^2 + bx - c^2 = 0$ encontramos uma sentença verdadeira.

Exemplo 3.2 *Resolva a equação $x^2 + 8x - 9 = 0$ pelo método de Descartes.*

Reescrevendo a equação dada tem-se $x^2 + 8x - 3^2 = 0$ que é do tipo $x^2 + bx - c^2 = 0$, com $b = 8$ e $c = 3$, logo podemos resolver usando o método de Descartes.

Figura 10. Resolução da equação $x^2 + 8x - 9 = 0$ pelo método de Descartes, $2°$ Caso.



Fonte: Autor

Após a realização das construções, já descritas, encontramos $\overline{BQ} = 1$ e $\overline{PB} = 9$. Logo, as raízes de $x^2 + 8x - 9 = 0$ são 1 e -9.

$3°$ Caso: Equação do tipo $x^2 - bx + c^2 = 0$

Resolução Geométrica

Considere uma equação quadrática do tipo $x^2 - bx + c^2 = 0$, $b, c \in \mathbb{R}^+$:

$1°$. Trace um segmento de reta AB medindo c.

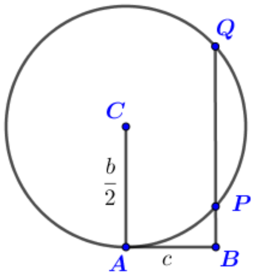
$2°$. Por A levante uma reta perpendicular ao segmento AB e marque o ponto C sobre ela de modo que $\overline{AC} = \frac{b}{2}$.

$3°$. Construa uma circunferência de centro C e raio $\overline{AC}$.

$4°$. Trace uma reta perpendicular ao segmento AB passando por B e marque os pontos P e Q nas interseções dessa reta com a circunferência (caso existam).

$5°$. A medida do segmento PB é a solução positiva da equação dada.

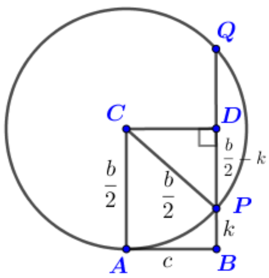
Figura 11. Construção do segmento BQ.



Fonte: VALE, A.F.A.d. (2013), adaptada.

De fato, trace uma reta perpendicular ao segmento $\overline{BQ}$ passando por C e marque o ponto D na interseção com BQ, (veja a Figura 12). Fazendo $\overline{PB} = k$ e aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo CDP, tem-se:

Figura 12. Figura do Método de Descartes, $3°$ Caso.



Fonte: Autor

$$
\begin{aligned}
\overline{CP}^2 &= \overline{CD}^2 + \overline{DP}^2 \\
\left(\frac{b}{2}\right)^2 &= c^2 + \left(\frac{b}{2} - k\right)^2
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{4} &= c^2 + \frac{b^2}{4} - bk + k^2 \\ k^2 - bk + c^2 &= 0. \end{aligned}$$

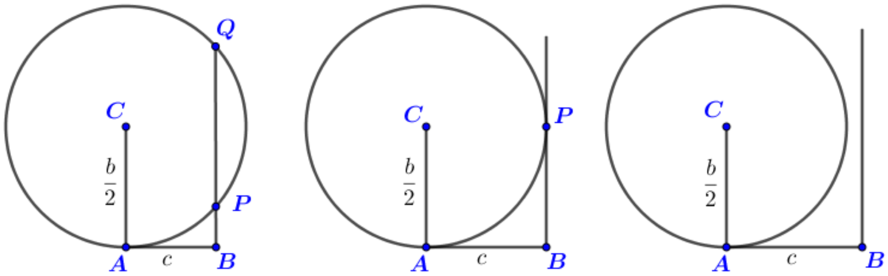
Portanto, $\overline{PB}$ é uma solução positiva da equação.

A medida do segmento $\overline{BQ}$ representa outra solução positiva da equação.

Com efeito, note que $\overline{BQ} = \overline{QD} + \overline{DP} + \overline{PB} = b - k$, substituindo $b - k$ na equação $x^2 - bx + c^2 = 0$, obtemos uma sentença verdadeira.

Note que, se $\frac{b}{2} > c$, temos duas raízes reais e distintas, se $\frac{b}{2} = c$, temos uma raiz real, se $\frac{b}{2} < c$, não existe raiz real. Na figura, a seguir, veja a construção para cada um desses casos.

Figura 13. Construção para os casos $\frac{b}{2} > c$, $\frac{b}{2} = c$ e $\frac{b}{2} < c$, respectivamente.

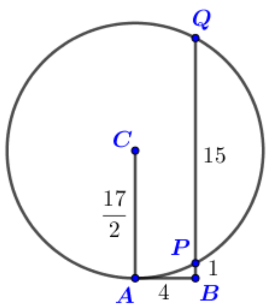


Fonte: Autor

Exemplo 3.3 *Resolva a equação $x^2 - 17x + 16 = 0$ pelo método de Descartes.*

Reescrevendo a equação dada tem-se $x^2 - 17x + 4^2 = 0$ que é do tipo $x^2 - bx + c^2 = 0$, com $b = 17$ e $c = 4$, logo podemos resolver usando o método de Descartes.

Figura 14. Resolução da equação $x^2 - 17x + 16 = 0$ pelo método de Descartes, $3°$ Caso.



Fonte: Autor

Depois de realizarmos as construções, já descritas, encontramos $\overline{PB} = 1$ e $\overline{BQ} = 16$. Portanto, as raízes de $x^2 - 17x + 16 = 0$ são 1 e 16.

4. Método de Leslie/Carlyle

Outro método de resolução geométrica de equação do segundo grau, segundo Eves (2002), foi apresentado por Leslie, em sua obra *Elements of Geometry*, nela apresentou o seguinte problema: dada uma equação quadrática $x^2 - bx + c = 0$, com b e $c \in \mathbb{R}$, sobre um sistema cartesiano retangular de referência marque os pontos $B(0,1)$ e $Q(b,c)$, trace uma circunferência de diâmetro BQ, as abcissas dos pontos em que essa circunferência cortar o eixo x, se cortar, são as raízes da equação quadrática dada.

Note que este método pode ser utilizado em qualquer equação do segundo grau.

Resolução Geométrica

Considere uma equação quadrática do tipo $x^2 - bx + c = 0$, com b e $c \in \mathbb{R}$:

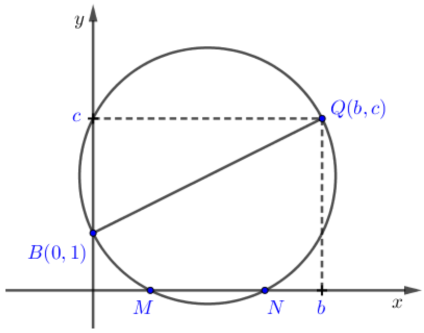
1°. Marque, num plano cartesiano, os pontos $B(0,1)$ e $Q(b,c)$ e trace BQ.

2°. Construa uma circunferência de diâmetro BQ.

3°. Marque os pontos M e N nas interseções de circunferência com o eixo x (caso existam).

4°. As abcissas dos pontos M e N serão as raízes da equação dada.

Figura 15. Figura do Método de Leslie/Carlyle, com $b > 0$ e $c > 0$.



Fonte: PEDROSO, H.A. (2010), adaptada.

Para a justificativa considere os pontos $M(r,0)$ e $N(s,0)$. Agora, devemos mostrar que as abcissas r e s desses pontos, satisfazem a equação $x^2 - bx + c = 0$.

Veja que a circunferência construída acima tem centro $\left(\frac{b}{2}, \frac{c+1}{2}\right)$ e raio $R = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-1}{2}\right)^2}$. Sua equação é

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-1}{2}\right)^2 \tag{7}$$

Fazendo $y = 0$ na equação (7) e desenvolvendo os quadrados, obtemos $x^2 - bx + c = 0$. Como r e s são as abcissas dos pontos da circunferência em que $y = 0$, temos que r e s satisfazem a $x^2 - bx + c = 0$.

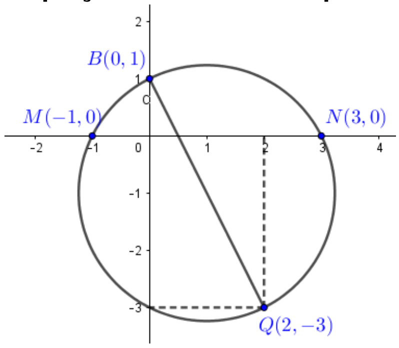
Dependendo do ponto (b, c), a circunferência poderá cortar o eixo x em dois pontos distintos, em um único ponto ou não cortá-lo.

Para a equação $x^2 + bx + c = 0$, com b e $c \in \mathbb{R}$, as coordenadas dos pontos B e Q seriam $(0, 1)$ e $(-b, c)$, respectivamente, e a demonstração seria análoga.

Exemplo 4.1 *Resolva a equação $x^2 - 2x - 3 = 0$ pelo método de Leslie/Carlyle.*

Para resolver esta equação pelo método de Leslie/Carlyle, note que, $Q(b, c) = (2, -3)$. Após realizarmos as construções, já descritas, encontramos -1 e 3 para as abcissas de M e N, que são as raízes procuradas.

Figura 16. Resolução da equação $x^2 - 2x - 3 = 0$ pelo método de Leslie/Carlyle.



Fonte: Autor

5. Método de Staudt

De acordo com Eves (2002), o método geométrico a seguir foi uma contribuição do alemão Karl Georg Christian von Staudt (1798-1867) que resolve equações do segundo grau conforme descrito a seguir. Dada a equação quadrática $x^2 + bx + c = 0$, com $b \neq 0$, marque os pontos $L\left(\frac{c}{-b}, 0\right)$ e $T\left(\frac{4}{-b}, 2\right)$ sobre um sistema retangular de coordenadas cartesianas e suponha que o segmento de reta LT corte a circunferência unitária de centro em $(0, 1)$ nos pontos R e S. Sejam $P(r, 0)$ e $Q(s, 0)$ as projeções de R e S a partir de $A(0, 2)$, respectivamente. As raízes da equação dada são r e s.

Note que, este segmento LT pode ser secante, tangente ou não possuir ponto em comum com a circunferência unitária de centro $(0, 1)$, o que resulta respectivamente em, duas raízes distintas, uma única raiz ou nenhuma raiz real. Observe que, poderíamos ter considerado a equação $x^2 - bx + c = 0$, com $b \neq 0$, $L\left(\frac{c}{b}, 0\right)$ e $T\left(\frac{4}{b}, 2\right)$.

Resolução Geométrica

Considere uma equação do tipo $x^2 + bx + c = 0$, com $b, c \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$:

1°. Sobre um plano cartesiano, marque os pontos $L\left(\frac{c}{-b}, 0\right)$ e $T\left(\frac{4}{-b}, 2\right)$ e trace o segmento LT.

2°. Suponha que o segmento de reta LT corte a circunferência unitária de centro $(0, 1)$ nos pontos R e S.

$3°$. Projete os pontos R e S a partir do ponto $A(0,2)$ sobre os pontos P e Q do eixo x.

$4°$. As abcissas dos pontos P e Q são as raízes da equação dada.

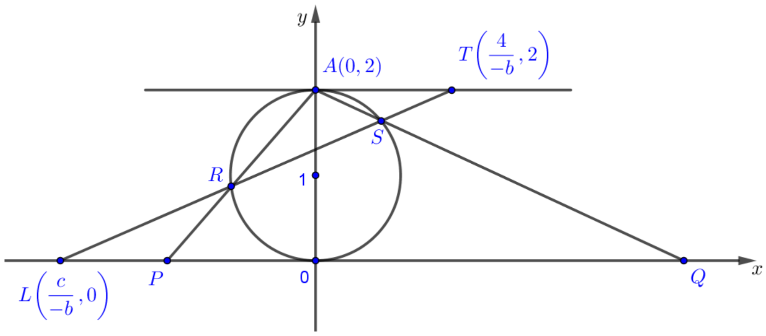
Note que, as equações da circunferência unitária de centro $(0,1)$ e das retas suportes dos segmentos AR e AS são, respectivamente:

$$x^2 + y(y-2) = 0 \quad (8)$$

$$2x + r(y-2) = 0 \quad (9)$$

$$2x + s(y-2) = 0 \quad (10)$$

Figura 17. Figura do Método de Staudt, com $b, c < 0$.



Fonte: Geometric Representations of Quadratic Solutions (2013), adaptada.

Multiplicando, membro a membro as equações (9) e (10), obtemos

$$4x^2 + 2(r+s)(y-2)x + rs(y-2)^2 = 0 \quad (11)$$

Multiplicando a equação (8) por 4 e igualando o primeiro membro da nova equação com o primeiro membro da equação (11), obtemos

$$\begin{aligned} 4x^2 + 2(r+s)(y-2)x + (rs)(y-2)^2 &= 4x^2 + 4y(y-2) \\ (y-2)[2x(r+s) + rs(y-2) - 4y] &= 0 \end{aligned}$$

Dessa forma, determinamos uma equação satisfeita pelos pontos A, R e S. Segue-se que os pontos A, R e S devem satisfazer $y = 2$ ou $2x(r+s) + rs(y-2) - 4y = 0$. Como, R e S não satisfazem $y = 2$, logo devem satisfazer

$$2x(r+s) + rs(y-2) - 4y = 0. \quad (12)$$

Lembramos que os pontos L e T pertencem à reta suporte do segmento RS quando $y = 0$ e $y = 2$. Logo as coordenadas dos pontos de interseção da reta dada por (12) com $y = 0$ e $y = 2$ são $(\frac{rs}{r+s}, 0)$ e $(\frac{4}{r+s}, 2)$, respectivamente.

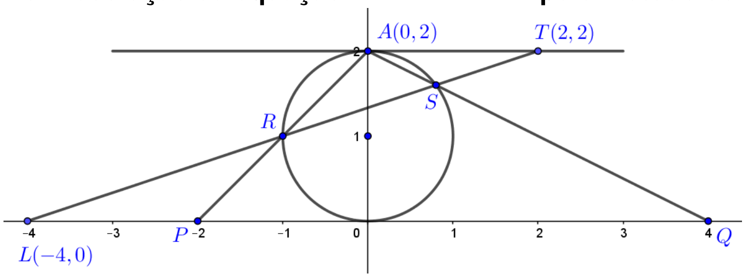
De $L(\frac{c}{-b}, 0) = (\frac{rs}{r+s}, 0)$ e $T(\frac{4}{-b}, 2) = (\frac{4}{r+s}, 2)$, obtemos que $r + s = -b$ e $rs = c$. Segue que r e s são as raízes de $x^2 + bx + c = 0$.

Exemplo 5.1 *Resolva a equação $x^2 - 2x - 8 = 0$ pelo método de Staudt.*

Pelo método de Staudt, com $a = 1$, $b = -2$ e $c = -8$, temos que, $L\left(\frac{c}{-b}, 0\right) = (-4, 0)$ e $T\left(\frac{4}{-b}, 2\right) = (2, 2)$.

Depois de realizarmos as construções,já descritas, encontramos P e Q cujas abcissas são -2 e 4, que são as soluções da equação.

Figura 18. Resolução da equação $x^2 - 2x - 8 = 0$ pelo método de Staudt.



Fonte: Autor

6. Método das Circunferências Tangentes

O último método geométrico apresentado neste trabalho é denominado por método das circunferências tangentes, também conhecido como semicircunferências tangentes ou simplesmente resolução com régua e compasso. Uma apresentação deste método encontra-se na Revista do Professor de Matemática, volume 12, escrita por Nelson Tunala com o título *Resolução Geométrica da Equação do* $2°$ *grau*. Este método pode ser aplicado em qualquer equação do segundo grau.

Considere uma equação do $2°$ grau qualquer, sabemos que podemos escreve-la na forma $x^2 + bx + c = 0$ com $b, c \in \mathbb{R}$ e $a = 1$. Se $c = 0$, então as raízes são sempre 0 e $-b$. Suponhamos então $c \neq 0$. Assim, temos dois casos a considerar, $c > 0$ e $c < 0$.

$1°$ Caso: Equações do tipo $x^2 + bx + c = 0$ com $c > 0$

Sendo x_1 e x_2 as raízes de $x^2 + bx + c = 0$, temos que, $x_1 + x_2 = -b$ e $x_1.x_2 = c$. Portanto, para $c > 0$ temos que x_1 e x_2 tem o mesmo sinal.

Lema 6.1 *Considere a equação $x^2+bx+c = 0$ com $c > 0$ e sejam x_1 e x_2 as suas raízes. Valem as seguintes identidades*

$$|x_1| + |x_2| = |b| \tag{13}$$

$$|x_1|.|x_2| = c. \tag{14}$$

De fato,

i) se $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$ então, $x_1 + x_2 = -b > 0 \Rightarrow b < 0$,

$|x_1| + |x_2| = x_1 + x_2 = -b = |b|$ e $|x_1|.|x_2| = x_1.x_2 = c$.

ii) se $x_1 < 0$ e $x_2 < 0$ então, $x_1 + x_2 = -b < 0 \Rightarrow b > 0$,

$|x_1| + |x_2| = -x_1 - x_2 = -(x_1 + x_2) = -(-b) = b = |b|$ e

$|x_1|.|x_2| = (-x_1).(-x_2) = x_1.x_2 = c$.

Logo, o problema consiste em determinar dois segmentos cuja soma seja $|b|$ e cujo produto seja c. Para isso veja a construção a seguir.

Resolução Geométrica

Considere uma equação do tipo $x^2 + bx + c = 0$, com $b, c \in \mathbb{R}$ e $c > 0$:

1°. Trace uma reta r e marque os segmentos MN, NO e OP sobre ela, de medidas c, 1 e $|b|$, respectivamente.

2°. Trace duas circunferências com diâmetros $\overline{MO}$ e $\overline{OP}$.

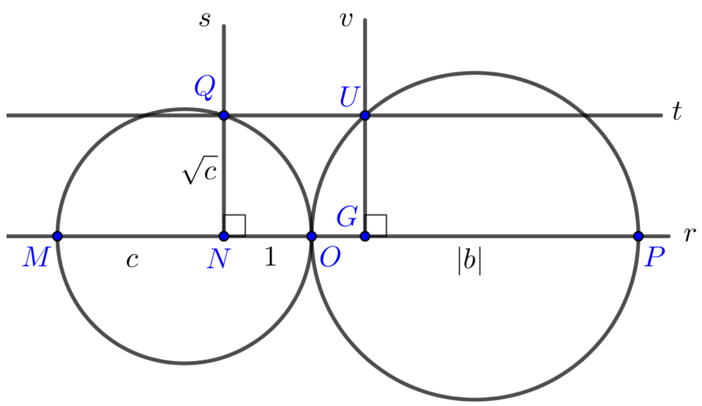
3°. A partir de N levante uma perpendicular s à reta r determinando o ponto Q na circunferência de diâmetro $\overline{MO}$.

4°. Por Q trace uma reta t paralela à reta r e marque o ponto U na interseção de t com a circunferência de diâmetro $\overline{OP}$.

5°. Trace por U uma reta v perpendicular à reta r e marque o ponto G na interseção de v com r.

6°. As medidas dos segmentos OG e GP representam os valores absolutos das raízes da equação dada.

Figura 19. Figura do Método das Circunferências Tangentes, 1° Caso.



Fonte: TUNALA, N. (1988), adaptada.

Devemos mostrar que $\overline{OG}$ e $\overline{GP}$ satisfazem as equações definidas por (13) e (14).

De fato, veja que o triângulo MQO inscrito na circunferência de diâmetro MO é retângulo em Q, então, pelas relações métricas no triângulo retângulo, temos,

$$\overline{NQ}^2 = \overline{MN}.\overline{NO}$$
$$\overline{NQ} = \sqrt{c}$$

Do mesmo modo, o triângulo OUP é retângulo em U, então, podemos escrever $\overline{GU}^2 = \overline{OG}.\overline{GP}$. Como $\overline{GU} = \overline{NQ}$, por construção, temos que $\overline{OG}.\overline{GP} = c$. Além disso, $\overline{OG} + \overline{GP} = |b|$.

Então, $\overline{OG}$ e $\overline{GP}$ são os dois segmentos cuja soma é $|b|$ e cujo produto é c. Desse modo, podemos escrever $|x_1| = OG$ e $|x_2| = GP$.

Assim, podemos dizer que,

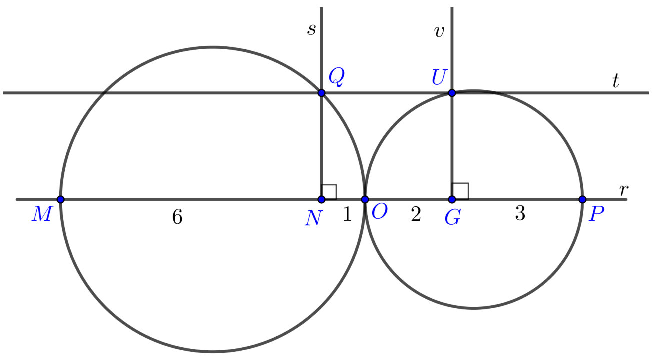
- Se $b > 0$, então, as raízes são negativas, ou seja, $x_1 = -\overline{OG}$ e $x_2 = -\overline{GP}$,
- Se $b < 0$, então, as raízes são positivas, ou seja, $x_1 = \overline{OG}$ e $x_2 = \overline{GP}$.

Observe que, se $\sqrt{c} = \frac{|b|}{2}$, então as duas raízes são iguais, se $\sqrt{c} > \frac{|b|}{2}$ as raízes não são reais. O mesmo ocorre para o caso degenerado $b = 0$ e $c > 0$.

Exemplo 6.1 *Rsesolva a equação $x^2 + 5x + 6 = 0$ pelo método das circunferências tangentes.*

Para essa equação, temos $a = 1$, $b = 5$ e $c = 6$. Após as devidas construções encontramos $\overline{OG} = 2$ e $\overline{GP} = 3$, que representam os valores absolutos das raízes procuradas.

Figura 20. Resolução da equação $x^2+5x+6 = 0$ pelo método das Circunferências Tangentes.



Fonte: Autor

Neste caso, como $c > 0$, temos que, as raízes tem o mesmo sinal e como $b > 0$ elas são negativas. Assim, as raízes de $x^2 + 5x + 6 = 0$ são $-\overline{OG}$ e $-\overline{GP}$, ou seja, $x_1 = -2$ e $x_2 = -3$.

2° Caso: Equações do tipo $x^2 + bx + c = 0$ com $c < 0$

Novamente, sendo x_1 e x_2 as raízes de $x^2 + bx + c = 0$, temos que $x_1 + x_2 = -b$ e $x_1.x_2 = c$. Portanto, para $c < 0$ temos que x_1 e x_2 tem sinais contrários.

Lema 6.2 *Considere a equação $x^2+bx+c=0$ com $c<0$ e sejam x_1 e x_2 as suas raízes. Supondo $|x_1|>|x_2|$, valem as seguintes identidades*

$$|x_1|-|x_2|=|b| \tag{15}$$

$$|x_1|.|x_2|=|c|. \tag{16}$$

De fato,

i) se $x_1>0$ e $x_2<0$ então, $x_1+x_2=-b>0 \Rightarrow b<0$,

$|x_1|-|x_2|=x_1-(-x_2)=x_1+x_2=-b=|b|$ e

$|x_1|.|x_2|=x_1.(-x_2)=-x_1.x_2=-c=|c|$.

ii) se $x_1<0$ e $x_2>0$ então, $x_1+x_2=-b<0 \Rightarrow b>0$,

$|x_1|-|x_2|=-x_1-x_2=-(x_1+x_2)=-(-b)=b=|b|$ e

$|x_1|.|x_2|=-x_1.x_2=-c=|c|$.

Agora, o problema consiste em determinar dois segmentos cuja diferença seja $|b|$ e cujo produto seja $|c|$. Veja a construção a seguir.

Resolução Geométrica

Considere uma equação do tipo $x^2+bx+c=0$, com $b,c\in\mathbb{R}$ e $c<0$:

$1°$. Trace uma reta r e marque os segmentos MN, NO e OP sobre ela, de medidas $|c|$, 1 e $|b|$, respectivamente.

$2°$. Trace duas circunferências com diâmetros $\overline{MO}$ e $\overline{OP}$.

$3°$. A partir de N levante uma perpendicular s à reta r determinando o ponto Q na circunferência de diâmetro $\overline{MO}$. Por Q trace uma reta t paralela à reta r.

$4°$. Por O levante uma perpendicular v à reta r e marque o ponto U na interseção de t com v.

$5°$. Trace uma reta q por U e I (sendo I o centro da circunferência de diâmetro $\overline{OP}$) e marque os pontos G e H nas interseções de q com a circunferência de diâmetro $\overline{OP}$, sendo G entre U e I.

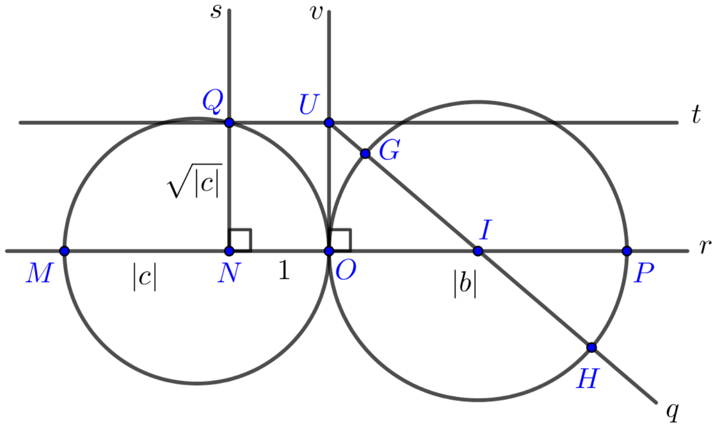
$6°$. As medidas dos segmentos UH e UG representam os valores absolutos das raízes da equação dada.

Para justificar este caso utilizaremos um argumento análogo ao do $1°$ caso, ou seja, devemos mostrar que $\overline{OG}$ e $\overline{GP}$ satisfazem as equações definidas por (15) e (16).

Inicialmente, temos que $\overline{UH}-\overline{UG}=|b|$, que é o diâmetro da circunferência de diâmetro $\overline{OP}$. Para o que falta, note que $\overline{OU}=\overline{NQ}$ por construção e OU e UH são tangente e secante, respectivamente, à circunferência de diâmetro $\overline{OP}$, logo, pelo teorema das cordas, temos,

$$\begin{aligned}\overline{OU}^2&=\overline{UH}.\overline{UG}\\|c|&=\overline{UH}.\overline{UG}\end{aligned}$$

Figura 21. Figura do Método das Circunferências Tangentes, $2°$ Caso.



Fonte: TUNALA, N. (1988), adaptada.

Portanto, como $\overline{UH}$ e $\overline{UG}$ satisfazem as equações (15) e (16), temos que esses segmentos representam os valores absolutos das raízes da equação dada. Desse modo, podemos escrever $|x_1| = UH$ e $|x_2| = UG$.

Segue, imediatamente dessa discussão que,

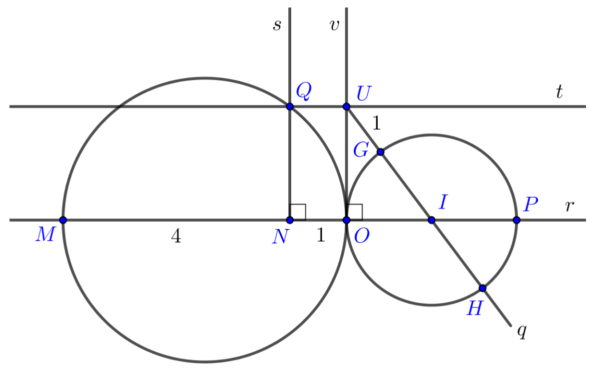
- Se $b > 0$, então, $x_1 = -\overline{UH}$ e $x_2 = \overline{UG}$,
- Se $b < 0$, então, $x_1 = \overline{UH}$ e $x_2 = -\overline{UG}$.

Note que, nos dois casos, poderíamos ter considerado duas circunferências não tangentes, e teríamos a mesma justificativa do caso abordado.

Exemplo 6.2 *Resolva a equação $x^2 + 3x - 4 = 0$ pelo método das circunferências tangentes.*

Seja a equação $x^2 + 3x - 4 = 0$, com $a = 1$, $b = 3$ e $c = -4$. Após as devidas construções encontramos as medidas dos segmentos $\overline{UH}$ e $\overline{UG}$, que são 4 e 1, respectivamente, e que representam os valores absolutos das raízes da equação dada.

Figura 22. Resolução da equação $x^2+3x-4 = 0$ pelo método das Circunferências Tangentes.



Fonte: Autor

ISSN 2447-7028

Como $c < 0$, as raízes tem sinais opostos, e como $b > 0$ temos que $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$. Daí as raízes de $x^2 + 3x - 4 = 0$ são $-\overline{UH}$ e $\overline{UG}$, ou seja, $x_1 = -4$ e $x_2 = 1$.

7. Referências

Euclides (2009). Os Elementos, UNESP, São Paulo.

Eves, H. (2002). Introdução à História da Matemática. 3. ed. Campinas: Unicamp, v.Único.

Pedroso, H. A. (2010). Uma Breve História da Equação do 2° Grau. Revista do Professor de Matemática-RPM, v.2.

Fragoso, W. d. C. (2000). Uma Abordagem Histórica da Equação do 2° Grau, Revista do Professor de Matemática-RPM, v.43.

Tunala, N. (1988). Resolução Geométrica da Equação do 2° Grau, Revista do Professor de Matemática-RPM, v.12, p.33 - 35.

DeMetsenaere, A. L. (2013). Geometric Representations of Quadratic Solutions, p.5 - 8.

Vale, A. F. A. d. (2013). As Diferentes Estratégias de Resolução da Equação do Segundo Grau, p.44 - 48.

Descartes, R. (2008). La géométrie. Editor: A Hermann.

Leslie, J. (1817). Elements of geometry and plane trigonometry: With an appendix, and copious notes and illustrations. Archibald Constable & Co, 3. Ausgabe.

Wagner, E. (1991). Um pouco sobre Descartes. Revista do Professor de Matemática-RPM, v.19, p. 15-20.