



Solução do Problema de Riemann para um Modelo Bifásico Simplificado num Meio Poroso com Expoentes de Corey Unitários

Edwin P. L. Bambarén¹, Erivaldo D. de Lima¹

¹Departamento de Matemática – Universidade Federal de Roraima

edwin.lopez@ufrr.br, erivaldo.lima@ufrr.br

Abstract. *This paper presents a simplified mathematical model of a petroleum reservoir on a porous rock with two phases, one composed by polymer diluted in water and the other one composed by oil. In order to obtain the saturation of both phases in relation to the reservoir and the saturation of the polymer in the aqueous phase, we obtain a Riemann problem. The purpose of this article is to obtain solution to this problem and to analyse such solution.*

Resumo. *Este artigo descreve um modelo matemático simplificado de um reservatório petrolífero sobre uma rocha porosa contendo duas fases, uma composta por água com polímero diluído e outra por óleo. Afim de obter as saturações destas duas fases em relação ao reservatório e a saturação do polímero na fase aquosa, obtemos um problema de Riemann. O objetivo deste artigo é obter a solução deste problema e fazer uma análise da solução obtida.*

1. Introdução

Um reservatório petrolífero formado por rocha porosa, utilizando sua pressão natural, tem um fator de produção de petróleo entre 5% e 15% [Menezello 2009], [Thomas 2001]. Devido a queda desta pressão, não se consegue extrair o restante do óleo de forma natural. Após esta etapa, é feito um poço injetor para utilização de um método secundário ou avançado de extração. A modelagem matemática proposta neste artigo provém do método avançado que consiste em injetar, através do poço injetor, água com polímero dissolvido, para diminuir a diferença das viscosidades entre os fluidos atuantes, aumentando com isso a eficiência da produção. Este modelo consiste de três componentes: água, polímero e óleo e de duas fases móveis: aquosa (água + polímero) e oleosa. Para cada componente, será utilizado a Lei de conservação das Massas e para cada fase a Lei de Darcy [Peaceman 1977]. A fim de obter um modelo simplificado, iremos adotar algumas hipóteses simplificadoras com intuito de estudar um modelo menos complexo. Através destas leis, das hipóteses simplificadoras, de uma mudança de variável adequada e utilizando uma condição inicial que modela o instante $t = 0$ obtemos um problema de Riemann cuja solução nos dará saturação da fase aquosa no reservatório e a saturação do polímero na fase aquosa, ambas em função do espaço e do tempo. A solução deste Problema nos dará informações para que possa ser feito uma otimização da produção de tal forma que, o custo da produção, os riscos ao meio ambiente e o risco a vidas humanas sejam o mais baixo possível, daí a importância de obter estas soluções, mesmo de modelos matemáticos simplificados.

2. Modelagem do Reservatório

Considere o reservatório homogêneo, sem fontes ou sumidouros, onde as densidades da fase aquosa e da fase oleosa são incompressíveis. Sejam $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $c = c(x, t)$ a saturação do polímero na fase aquosa, $s = s(x, t)$ e $s_o = s_o(x, t)$ a saturação da fase aquosa (saturação da água + saturação do polímero), e do óleo no reservatório, respectivamente, v e v_o as velocidades da fase aquosa e oleosa, respectivamente e $\phi = \phi(x)$ a função porosidade do reservatório. Da Lei de Conservação das Massas, obtemos o Sistema

$$\begin{cases} \phi \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 & \text{(fase aquosa)} \\ \phi \frac{\partial s_o}{\partial t} + \frac{\partial v_o}{\partial x} = 0 & \text{(óleo)} \\ \phi \frac{\partial (sc)}{\partial t} + \frac{\partial (vc)}{\partial x} = 0. & \text{(polímero)} \end{cases} \quad (1)$$

Como s e s_o são saturações e $c = s_p/s$ (s_p saturação do polímero no reservatório) é a saturação do polímero na fase aquosa, então estas variáveis pertencem ao intervalo $I = [0, 1]$.

Considere a Lei de Darcy para cada fase sem efeitos gravitacionais. Com isso, obtemos as equações de velocidade da fase aquosa e oleosa

$$v = -\lambda \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{e} \quad v_o = -\lambda_o \frac{\partial p_o}{\partial x}, \quad (2)$$

respectivamente, em que $\lambda = \lambda(s, c) = \frac{Kk_r(s)}{\mu(s)}$, $\lambda_o = \lambda_o(s) = \frac{Kk_{ro}(s)}{\mu_o}$, $p = p(x)$ e $p_o = p_o(x)$ são as pressões das fases aquosa e oleosa, respectivamente, K é a permeabilidade absoluta da rocha, $k_r = k_r(s, c)$ e $k_{ro} = k_{ro}(s)$ são as permeabilidades relativas das fases aquosa e oleosa, respectivamente, e $\mu(c)$ e μ_o são as viscosidades da fase aquosa e da fase oleosa, respectivamente. Neste modelo, a viscosidade da fase oleosa é constante e a da fase aquosa varia de acordo com a saturação de polímero nesta.

Considere que a velocidade total $v_T = v + v_o$ não muda quando o polímero é dissolvido na água, ou seja, a velocidade total v_T permanece constante ao longo do tempo. Da Equação (1) conclui-se v_T é constante. Da Equação (2) conclui-se que:

$$v = v_T f + h \frac{\partial p_c}{\partial x}, \quad (3)$$

onde $p_c = p_c(x)$ é a pressão capilar entre as fases aquosa e oleosa e

$$f = f(s, c) = \frac{\lambda(s, c)}{\lambda(s, c) + \lambda_o(s)} \quad \text{e} \quad h = h(s, c) = \frac{\lambda(s, c) \lambda_o(s)}{\lambda(s, c) + \lambda_o(s)}. \quad (4)$$

Como a diferença de pressão entre as fases é muito pequena, vamos simplesmente desprezá-la. Com isso, a Equação (3) torna-se

$$v = v_T f. \quad (5)$$

Considerando a primeira função de (4) na primeira equação de (1), com a mudança de variável

$$\tilde{x} = x \quad \text{e} \quad \tilde{t} = \frac{v_T t}{\phi},$$

obtemos o sistema de EDPs

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial f(s, c)}{\partial \tilde{x}} = 0 \\ \frac{\partial (sc)}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial (cf(s, c))}{\partial \tilde{x}} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

que, juntamente com a condição inicial

$$(s, c)(\tilde{x}, 0) = \begin{cases} (s^L, c^L), & \text{se } \tilde{x} < 0 \quad (\text{injetor}) \\ (s^R, c^R), & \text{se } \tilde{x} > 0, \quad (\text{produtor}) \end{cases} \quad (7)$$

constitui o problema de Riemann a ser abordado neste Artigo. Para simplificar a notação, volmos voltar a usar x e t , respectivamente, no lugar de \tilde{x} e \tilde{t} . Vamos considerar também o Modelo de Corey simplificado com expoente unitário para as funções de permeabilidade relativa [Corey 1954], isto é,

$$k(s) = s \quad \text{e} \quad k_o(s) = (1 - s). \quad (8)$$

Os expoentes de Corey unitários tornam as permeabilidades relativas em funções lineares. Devido a isso, o modelo matemático torna-se muito impreciso em relação a realidade física. Consideramos estes expoentes a fim de obter um modelo matemático mais simplificado possível. Sabemos que a viscosidade da água é menor que a do polímero e esta é menor do que a do óleo, isto é, sendo μ_w , μ_p e μ_o , as viscosidades da água, do polímero e do óleo, respectivamente, temos $\mu_w < \mu_p < \mu_o$. Vamos considerar $R(c) = \mu(c) / \mu_o$, onde $\mu(c) = (\mu_p - \mu_w)c + \mu_w$. A expressão no numerador da função R representa a viscosidade da fase aquosa (água + polímero). Substituindo (8) na expressão f de (4), obtemos a função de fluxo

$$f(s, c) = \frac{s}{s + R(c)(1 - s)}. \quad (9)$$

Observe que, quando a saturação do polímero na fase aquosa é constante, o gráfico da função fluxo (9) torna-se similar ao da equação de Burgues [LeFloch 2002], porém, com a concavidade voltada para baixo. Dependendo das constantes da função R , a concavidade do gráfico da função fluxo f pode ser voltada para cima ou para baixo. A viscosidade da fase aquosa é sempre menor do que a viscosidade da fase oleosa para todo $c \in I$, logo, $R(c) < 1$. Para o desenvolvimento dos gráficos utilizados neste Artigo, utilizemos $\mu_w = 1.0$, $\mu_p = 1.5$ e $\mu_o = 2.0$.

3. Propriedades da Função Fluxo

Sejam $\Omega = I \times I$ o espaço de estados e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a função fluxo dada por (9), onde $\mu_w < \mu_p < \mu_o$. Então f satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $f(0, c) = 0$ e $f(1, c) = 1$, para todo $c \in I$;

- (ii) $\frac{\partial f}{\partial s}(s, c) > 0$, para todo $(s, c) \in \text{int}(\Omega)$;
- (iii) $\frac{\partial f}{\partial c}(s, c) < 0$, para todo $(s, c) \in \text{int}(\Omega)$;
- (iv) $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(s, c) < 0$, para todo $(s, c) \in \text{int}(\Omega)$.

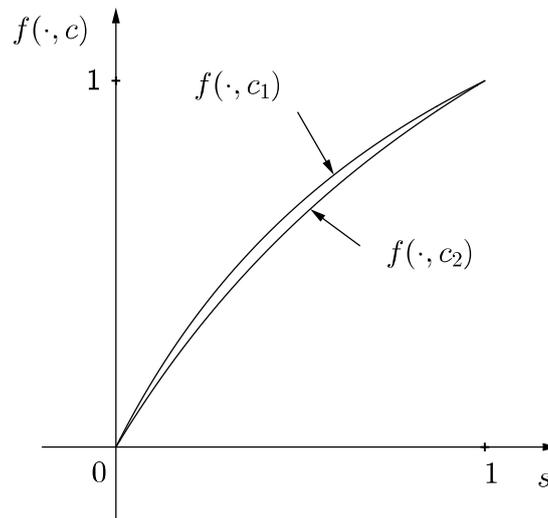


Figura 1. A figura ilustra que a função de fluxo f cresce em relação a s e decresce em relação a c . Neste caso $c_1 = 0 < c_2 = 0.4$.

4. Ondas Fundamentais

Para obter a solução global do Problema de Riemann (6)-(7) precisamos obter as ondas fundamentais que a compõem. Neste caso, temos ondas contínuas e descontínuas, sendo que a descontínua deve satisfazer uma condição de entropia para termos unicidade da solução.

4.1. Ondas de Rarefação

Considere as funções $F, G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por

$$G(s, c) = (s, sc) \quad \text{e} \quad F(s, c) = (f(s, c), cf(s, c)). \quad (10)$$

Seja $u = (s, c)$, então o Sistema (6) é escrito na forma

$$\frac{\partial [G(u)]}{\partial t} + \frac{\partial [F(u)]}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

Calculando as matrizes jacobianas temos

$$dG(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & s \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad dF(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial c} \\ c \frac{\partial f}{\partial s} & f + c \frac{\partial f}{\partial c} \end{pmatrix},$$

Observe que a matriz $dG(u)$ é inversível para $s \in (0, 1]$. Para soluções contínuas, o Problema de Riemann (6)-(7) é escrito como

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + A(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} u^L, & \text{se } x < 0 \\ u^R, & \text{se } x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (12)$$

na qual a matriz $A(u)$ é dada por

$$A(u) = [dG(u)]^{-1} dF(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial c} \\ 0 & \frac{f}{s} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

onde $u^L = (s^L, c^L)$ e $u^R = (s^R, c^R)$ são os estados iniciais distintos em Ω .

A matriz $A(u)$ possui 2 autovalores denominados *velocidades características* relacionadas as soluções contínuas do Problema de Riemann (12). Neste caso, as velocidades características são dadas por

$$\lambda_1 = \lambda_1(s, c) = \frac{\partial f}{\partial s}(s, c) < \lambda_2 = \lambda_2(s, c) = \frac{f(s, c)}{s},$$

para todo $s \in (0, 1]$ e $c \in [0, 1]$. A igualdade não ocorre porque as velocidades características não estão definidas em $s = 0$ e como existe uma relação de ordem entre os valores característicos, então o Sistema (6) é *estritamente hiperbólico* [Smoller 1994]. Geometricamente, para cada valor de c fixo, λ_1 representa o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $f(s, c)$. Já λ_2 representa o coeficiente angular da reta secante nos pontos $(0, 0)$ e $(s, f(s, c))$.

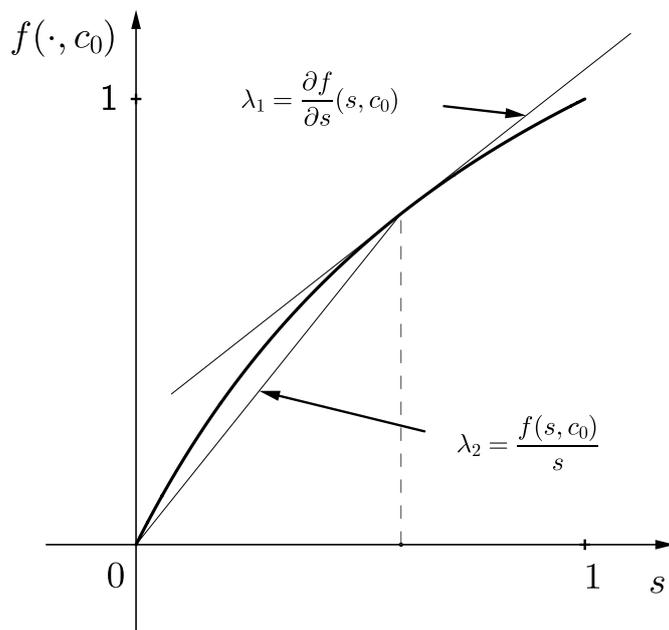


Figura 2. A figura ilustra as duas velocidades características λ_1 e λ_2 . Estas velocidades são os coeficientes angulares das retas indicadas para um $c = c_0$.

Sejam e_1 e e_2 os autovetores correspondentes a λ_1 e λ_2 , respectivamente. Os autovetores relacionados a matriz $A(u)$ são chamados de *campos característicos*. Para λ_1 temos que $e_1 = (1, 0)$. Para λ_2 temos que $e_2 = (\frac{\partial f}{\partial c}, \lambda_2 - \lambda_1)$ para $s \in (0, 1)$ e para $s \in \{0, 1\}$ temos $e_2 = (0, 1)$.

Sejam λ_i , com $i \in \{1, 2\}$, uma velocidade característica da matriz $A(u)$ e e_i seu respectivo campo característico. Seja $\xi = x/t$ e suponha que $u(x, t) = v(s(\xi), c(\xi))$

seja solução contínua do Sistema (12). Uma *onda de i-rarefação* do estado u^L para o estado u^R é uma solução contínua de (6)-(7) da forma

$$u(x, t) = \begin{cases} u^L, & \text{se } \frac{x}{t} < \lambda_i(u^L) \\ v, & \text{se } \lambda_i(u^L) \leq \frac{x}{t} \leq \lambda_i(u^R) \\ u^R, & \text{se } \frac{x}{t} > \lambda_i(u^R), \end{cases} \quad (14)$$

onde $v = v(s(\xi), c(\xi))$ é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dv}{d\xi} = e_i(v(s(\xi), c(\xi))) \\ v(s(0), c(0)) = u^L, \end{cases}$$

tal que a velocidade característica $\lambda_i(u)$ cresça de $\lambda_i(u^L)$ para $\lambda_i(u^R)$ quando u variar de u^L até u^R . A conclusão deste tipo de solução pode ser encontrada em [Smoller 1994]. Observe que para cada i temos uma solução contínua. Cada velocidade característica λ_i com seu respectivo campo característico e_i determinam uma *i-família característica*. Dessa forma, temos ondas de rarefação da 1-família e da 2-família.

Definição 4.1. Uma curva integral relacionada à onda *i-rarefação* é a família de soluções Equação Diferencial Ordinária

$$\frac{dv}{d\xi} = e_i(v(s(\xi), c(\xi))).$$

Definição 4.2. Uma curva de rarefação da família i (ou curva *i-rarefação*) por um estado inicial u^L é o conjunto de estados $u \in \Omega$ que podem ser conectados ao estado u^R por uma onda *i-rarefação*.

As curvas de *i-rarefação* estão contidas na curva integral relacionada à *i-família*, por isso, precisamos determinar as curvas integrais dos campos característicos e_1 e e_2 e em seguida as ondas de rarefação. Como a matriz $A(u)$ possui duas velocidades características λ_1 e λ_2 , então podemos ter duas de ondas de rarefação.

4.1.1. Onda de Rarefação da 1-família

Considere agora a velocidade característica $\lambda_1 = \frac{\partial f}{\partial s}$ com seu respectivo campo característico $e_1 = (1, 0)$. As curvas integrais associadas a esta família são retas paralelas ao eixo das saturações, isto é, c é constante. Neste caso, para que haja uma onda de 1-rarefação de (s^L, c^L) para (s^R, c^R) é necessário que $c^L = c^R$ e que $\lambda_1(s, c^L)$ seja crescente com s variando de s^L para s^R . Das propriedades (i)-(iv) da função fluxo f temos que $\lambda_1(s, c^L)$ é crescente de s^L para s^R se $s^L > s^R$.

4.1.2. Onda de Rarefação da 2-família

Considere a velocidade característica λ_2 com seu respectivo campo característico e_2 . Neste caso, temos que analisar duas situações: quando $s \in (0, 1)$ e quando $s = 1$. No

primeiro caso, as curvas integrais do campo característico e_2 satisfaz o Sistema de EDOs

$$\begin{cases} \frac{ds}{d\xi} = \frac{\partial f}{\partial c} \\ \frac{dc}{d\xi} = \lambda_2 - \lambda_1. \end{cases}$$

Como $\lambda_1 < \lambda_2$, então

$$\frac{\partial f}{\partial c} \frac{dc}{ds} = \lambda_2 - \lambda_1, \tag{15}$$

Observe que, como $\frac{\partial f}{\partial c} < 0$ temos $\frac{dc}{ds} < 0$, uma vez que $\lambda_1 < \lambda_2$. Isto significa que, ao longo das curvas integrais, $c(s)$ é decrescente. Outro fato a ser observado é que $\frac{\partial c}{\partial s}$ existe para todo $s \in (0, 1]$, ou seja, não existe uma reta tangente a $c(s)$ paralelo ao eixo c . No segundo caso, temos que $\lambda_2(1, c) = 1$ para todo $c \in [0, 1]$, isto é, λ_2 é uma função constante em c . Portanto, a curva integral relacionada a λ_2 para $s = 1$ é a reta vertical ao eixo s que passa pelo ponto $(1, 0)$.

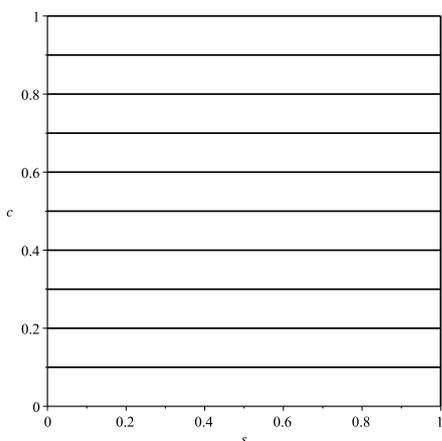


Figura 3. A figura ilustra as curvas integrais da 1-família.

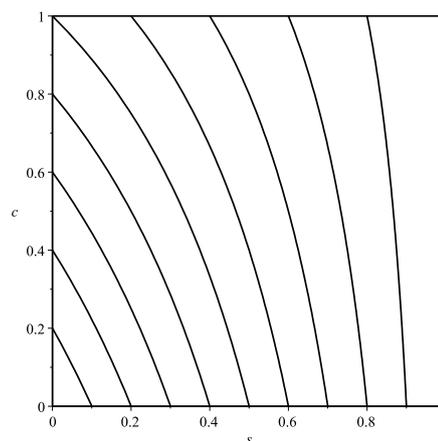


Figura 4. A figura ilustra as curvas integrais da 2-família.

4.2. Ondas de Choque

A *onda de choque* é uma solução descontínua do Problema de Riemann (6)-(7) ao longo da reta $\frac{x}{t} = \sigma$, onde σ é obtida através da relação de Rankine-Hugoniot

$$\sigma [G(u^R) - G(u^L)] = F(u^R) - F(u^L), \tag{16}$$

em que $G, F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ são as funções definidas em (10) que satisfaz alguma *condição de entropia*. Esta solução, para os estados $u^L = (s^L, c^L)$ e $u^R = (s^R, c^R)$, é da forma

$$u(x, t) = \begin{cases} u^L, & \text{se } \frac{x}{t} < \sigma \\ u^R, & \text{se } \frac{x}{t} > \sigma, \end{cases} \tag{17}$$

onde $u = (s, c)$, e σ é a *velocidade de propagação (ou velocidade de choque)* extraída da relação de Rankine-Hugoniot. Sem a condição de entropia, a solução descontínua do Problema (6)-(7) não possui unicidade. Como vamos considerar soluções descontínuas fisicamente possíveis, exigiremos esta condição.

Vamos agora encontrar as duas expressões, σ_1 e σ_2 , para a velocidade de choque σ em função dos estados (s^L, c^L) e (s^R, c^R) fixados. Da Equação (16) obtemos o sistema

$$\begin{cases} \sigma (s^R - s^L) = f(s^R, c^R) - f(s^L, c^L), \\ \sigma (s^R c^R - s^L c^L) = c^R f(s^R, c^R) - c^L f(s^L, c^L). \end{cases} \quad (18)$$

Observe que temos duas situações, uma quando $c^L \neq c^R$ e outra quando $c^L = c^R$. Cada uma dessas situações vai determinar uma i -família. No caso em que $c^L = c^R$ a segunda equação de (18) torna-se a primeira. Dessa forma, o Sistema (18) torna-se a relação de Rankine-Hugoniot para o caso de uma variável. Dessa forma, a velocidade de choque será relacionada a 1-família, uma vez que, no caso das ondas de 1-rarefação as retas horizontais determinam a 1-família. Logo, a velocidade que choque σ_1 é dada por

$$\sigma_1(u^L, u^R) = \frac{f(s^L, c^L) - f(s^R, c^R)}{s^L - s^R}. \quad (19)$$

No caso em que $c^L \neq c^R$, isola-se $f(s^R, c^R)$ na primeira equação de (18) e substituindo-a na segunda, obtemos a equação

$$\sigma_2(u^L, u^R) = \frac{f(s^L, c^L)}{s^L}. \quad (20)$$

Caso isole $f(s^L, c^L)$ na primeira equação, obtemos também a expressão

$$\sigma_2(u^L, u^R) = \frac{f(s^R, c^R)}{s^R}. \quad (21)$$

Com isso, concluímos que a velocidade σ_2 é constante. O índice 2 na velocidade de choque σ indica que ela está relacionada a 2-família, uma vez que, $\sigma_2 = \lambda_2$.

Definição 4.3. Fixe um estado $u^0 \in \Omega$. A curva de Hugoniot por u^0 , denotada por $\mathcal{H}(u^0)$, é o conjunto dos estados $u \in \Omega$ tais que exista $\sigma \in \mathbb{R}$ satisfazendo a equação

$$\mathcal{H}(u^0, \sigma, u) \equiv F(u) - F(u^0) - \sigma [G(u) - G(u^0)] = 0. \quad (22)$$

Neste caso σ_1 e σ_2 satisfazem a Equação (22). Cada σ determina uma *Curva de i-Hugoniot*, denotada por $\mathcal{H}_i(u^0)$.

Definição 4.4. Uma curva de choque por um estado inicial $u^L \in \Omega$ é o conjunto de estados $u \in \Omega$ que podem ser conectados ao estado u^R por uma onda de choque.

Para a velocidade de propagação σ_i , temos uma *curva de i-choque*. Quando a curva de i -choque coincide com a curva i -rarefação estas curvas são chamadas de *curva i-contato*. Como $\sigma_2 = \lambda_2$, então a curva de 2-choque coincide com a curva



2-rarefação. Daí, temos a curva 2-contato, que a chamaremos simplesmente de *curva de contato*.

Para obtermos uma solução descontínua única, vamos utilizar a condição de entropia de Oleinik-Liu [Smoller 1994], [Liu 1974].

Condição de Entropia de Oleinik-Liu - Sejam F e G as aplicações definidas em (10) e $\sigma : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ função velocidade, tal que

$$\sigma(u_1, u_2) [G(u_1) - G(u_2)] = F(u_1) - F(u_2), \quad (23)$$

para todo $(u_1, u_2) \in \Omega \times \Omega$. A condição de entropia de Oleinik-Liu é satisfeita se as desigualdades

$$\sigma(u, u^R) \leq \sigma(u^R, u^L) \leq \sigma(u, u^L), \quad (24)$$

são verificadas para todo $u \in \mathcal{H}(u^L)$. Basta mostrar uma dessas desigualdades.

Para a 1-família a desigualdade (24) é satisfeita se $s^L < s^R$. Já a 2-família, a desigualdade (24) é facilmente satisfeita, uma vez que σ_2 é constante.

5. Solução do Problema de Riemann

A forma de obter a solução global do Problema de Riemann (6)-(7) será a mesma utilizada em [Lima 2015] e [Silva 2015]. Tal forma consiste em dividir o espaço de estados Ω em regiões onde, primeiramente, o estado u^L será fixado. Após isto, o espaço de estados sofrerá uma nova divisão onde o estado u^R será fixado. Dependendo das regiões onde os estados serão fixados, uma expressão da solução do Problema de Riemann (6)-(7) será determinada. Nos casos mais complexos, a solução consiste na composição entre as ondas da 1-família e contato.

Sejam $u^- = (s^-, c^-)$ e $u^+ = (s^+, c^+)$ os estados à esquerda e a direita, respectivamente. A velocidade inicial e final da onda i -rarefação são as velocidades características $\lambda_i(u^-)$ e $\lambda_i(u^+)$, respectivamente. Já a velocidade da onda i -choque entre os estados u^- e u^+ é a velocidade de propagação $\sigma_i(u^-, u^+)$. Estas velocidades são chamadas de *velocidades de onda*. Chamemos simplesmente de i -onda a onda de i -rarefação ou onda de i -choque. Vamos usar

$$u^- \xrightarrow{i} u^+$$

para denotar que o estado u^- pode ser conectado ao estado u^+ por uma i -onda, com $i \in \{1, 2\}$.

Para o caso $c^L = c^R$ a solução do Problema de Riemann (6)-(7) consiste em apenas na 1-onda conectando o estado u^L ao estado u^R , isto é,

$$u^L \xrightarrow{1} u^R.$$

Se $s^L > s^R$, então a 1-onda é uma onda de 1-rarefação e se $s^L < s^R$ temos uma onda de 1-choque.

Suponha agora que $c^L \neq c^R$. Neste caso duas situações podem ocorrer. Uma, quando os estados u^L e u^R estão na mesma curva integral e o outra que não estão. Se estes

estados estiverem na mesma curva integral, então a solução do Problema de Riemann (6)-(7) consiste de um contato conectando o estado u^L ao estado u^R , isto é,

$$u^L \xrightarrow{2} u^R.$$

Suponha também que os estados u^L e u^R não estejam na mesma curva de integral.

Definição 5.1. Considere uma i_1 -onda $u^L \xrightarrow{i_1} u^M$ e uma i_2 -onda $u^M \xrightarrow{i_2} u^R$. Sendo $v_{final}^{i_1}$ a velocidade final da i_1 -onda e $v_{inicial}^{i_2}$ a velocidade inicial da i_2 -onda, então, dizemos que estas ondas são compatíveis na solução do problema de Riemann com estado à esquerda u^L e estado à direita u^R se

$$v_{final}^{i_1} \leq v_{inicial}^{i_2}. \quad (25)$$

A solução do Problema de Riemann consiste de uma sequência de 1-ondas e 2-ondas compatíveis que conectam o estado à esquerda u^L ao estado à direita u^R por um estado intermediário u^M .

Teorema 5.1. Sejam u^L e u^R estados à direita e à esquerda, respectivamente, no espaço de estados Ω tais que $c^L \neq c^R$ e que não estejam na mesma curva de contato. Seja u^M o estado intermediário determinado pela intersecção da curva 1-onda do estado u^L com a curva 2-onda do estado u^R . Então, a solução do Problema de Riemann (6)-(7) compatível é da forma

$$u^L \xrightarrow{1} u^M \xrightarrow{2} u^R,$$

onde a 2-família é um contato.

Demonstração. A 2-família é constituída por uma curva de contato, com isso,

$$v_{inicial}^2 = v_{final}^2 = \lambda_2(u^L) = \lambda_2(u^M) = \sigma_2(u^L, u^M).$$

Caso $v_{final}^1 = \lambda_1(u^M)$, as ondas são compatíveis, uma vez que $\lambda_1 < \lambda_2$ para qualquer estado $u \in (0, 1] \times [0, 1]$. Suponha agora que $v_{final}^1 = \sigma_1(u^L, u^M)$. Note que ambas as velocidades encontram-se na reta $c = c^R$. Das propriedades da função fluxo f conclui-se que $\sigma_1(u^L, u^M) < \lambda_2(u^M)$. ■

Iremos agora obter as regiões para os estados serem fixados. A região para o estado u^L é o próprio espaço de estados Ω . Para o estado u^R , considere um estado qualquer u^0 em Ω . Denotemos por $\Gamma(u^0)$ a curva integral que contém o estado u^0 . Acompanhe a divisão do espaço de estados na Figura 5. Fixe o estado u^L no espaço de estados Ω e considere a curva integral $\Gamma(u^L)$. Considere agora o estado $u_0^L = (0, c^L)$ obtido pela intersecção da reta $c = c^L$ com a reta $s = 0$. Dessa forma, vamos dividir o espaço de estados em 3 regiões como a seguir.

- R_1 - Região à direita da curva $\Gamma(u^L)$;
- R_2 - Região entre as curvas $\Gamma(u_0^L)$ e $\Gamma(u^L)$;
- R_3 - Região à esquerda da curva $\Gamma(u_0^L)$.

No teorema a seguir, u^M é o estado intermediário dado pela intersecção da curva de contato $\Gamma(u^R)$ com a curva $c = c^L$.

Teorema 5.2. *Seja $u^L \in \Omega$ fixo.*

(i) *Se $u^R \in R_1$, então a solução do Problema de Riemann (6)-(7) é dada pela sequência de ondas*

$$u^L \xrightarrow{1} u^M \xrightarrow{2} u^R,$$

onde a 1-família é um 1-choque e a 2-família é um contato. (Figura 5)

(ii) *Se $u^R \in R_2$, então a solução do Problema de Riemann (6)-(7) é dada pela sequência de ondas*

$$u^L \xrightarrow{1} u^M \xrightarrow{2} u^R,$$

onde a 1-família é um 1-rarefação e a 2-família é um contato. (Figura 6)

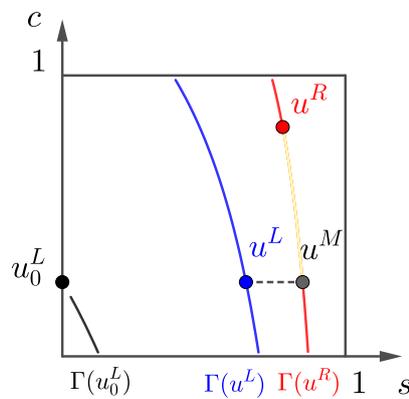


Figura 5. A linha tracejada ilustra a curva de 1-choque do estado u^L para o estado u^M e linha amarela a curva de contato de u^M para u^R .

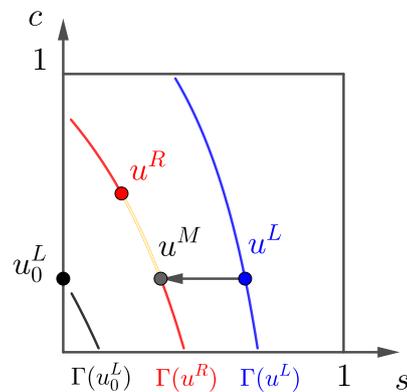


Figura 6. A seta ilustra a curva de 1-rarefação do estado u^L para o estado u^M e linha amarela a curva de contato de u^M para u^R .

(iii) *Se $u^R \in R_3$, então o Problema de Riemann (6)-(7) não possui solução. (Figura 7)*

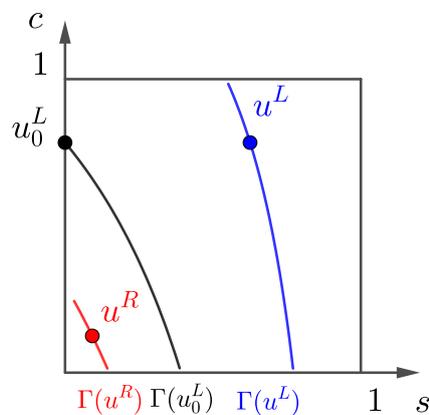


Figura 7. O Problema de Riemann não possui solução.

6. Exemplo de Aplicação

Considere um reservatório petrolífero qualquer nas hipóteses do modelo, com viscosidades $\mu_w = 1.0$, $\mu_p = 1.5$ e $\mu_o = 2.0$. Com isso, temos a função fluxo

$$f(s, c) = \frac{s}{s + (0.25c + 0.5)(1 - s)}.$$

Suponha que o reservatório tenha, inicialmente, em seu lado esquerdo, uma saturação de água de 0.65 e uma saturação do polímero na fase aquosa de 0.26 e, em seu lado direito, uma saturação de água de 0.78 e uma saturação do polímero na fase aquosa de 0.82. Aplicando estes dados no modelo, obtemos o Problema de Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial f(s, c)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial (sc)}{\partial t} + \frac{\partial (cf(s, c))}{\partial x} = 0 \\ (s, c)(x, 0) = \begin{cases} (0.65, 0.26), & \text{se } x < 0 \\ (0.78, 0.82), & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (26)$$

Observe que o estado à direita $u^R = (0.78, 0.82)$ pertence a região R_1 . Logo, a solução do Problema (26) é dada por

$$u^L \xrightarrow{1} u^M \xrightarrow{2} u^R,$$

com a 1-onda de 1-choque e a 2-onda um contato. A Figura 8 ilustra a solução no espaço de estados Ω e a Figura 9 no espaço sx .

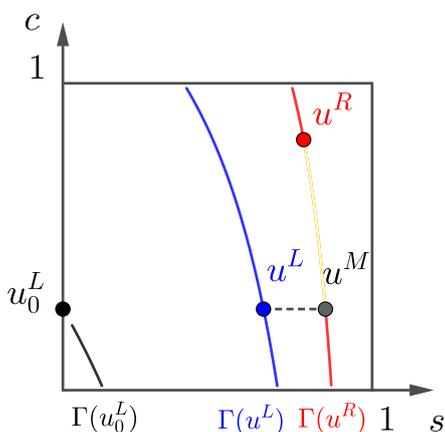


Figura 8. Solução do Problema de Riemann para os estados $u^L = (0.65, 0.26)$ e $u^R = (0.21, 0.57)$.

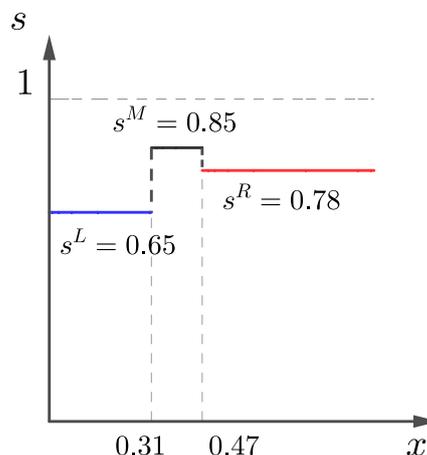


Figura 9. Solução do Problema de Riemann no Espaço sx para $t = 0.44$.

A Figura 9 ilustra as saturações das fases aquosa e oleosa no instante $t = 0.44$. Com o passar do tempo, percebe-se que a saturação do óleo aumenta com relação a fase aquosa. Isto ocorre pelo fato da condição inicial indicar uma quantidade maior da fase aquosa do lado direito do reservatório, o que é fisicamente impossível, pois esta fase está sendo injetada pelo lado esquerdo. Porém, no modelo matemático, é possível este tipo de situação.

Suponha agora que um reservatório tenha, inicialmente, em seu lado esquerdo, uma saturação de água de 0.65 e uma saturação do polímero na fase aquosa de 0.26 e, em seu lado direito, uma saturação de água de 0.21 e uma saturação do polímero na fase aquosa de 0.57. Aplicando estes dados no modelo, obtemos o Problema de Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial f(s, c)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial (sc)}{\partial t} + \frac{\partial (cf(s, c))}{\partial x} = 0 \\ (s, c)(x, 0) = \begin{cases} (0.65, 0.26), & \text{se } x < 0 \\ (0.21, 0.57), & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (27)$$

Observe que o estado à direita $u^R = (0.21, 0.57)$ pertence a região R_2 . Logo, a solução do Problema (27) é dada por

$$u^L \xrightarrow{1} u^M \xrightarrow{2} u^R,$$

com a 1-onda de 1-choque e a 2-onda um contato. A Figura 10 ilustra a solução no espaço de estados Ω e a Figura 11 no espaço sx .

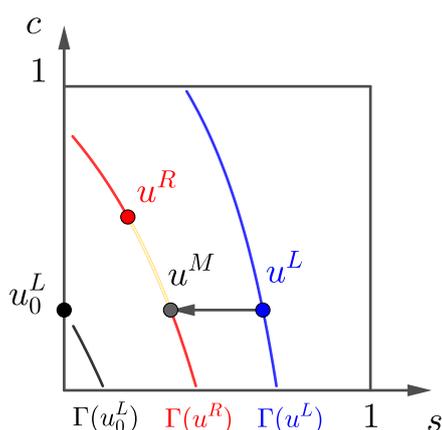


Figura 10. Solução do Problema de Riemann para os estados $u^L = (0.65, 0.26)$ e $u^R = (0.21, 0.57)$.

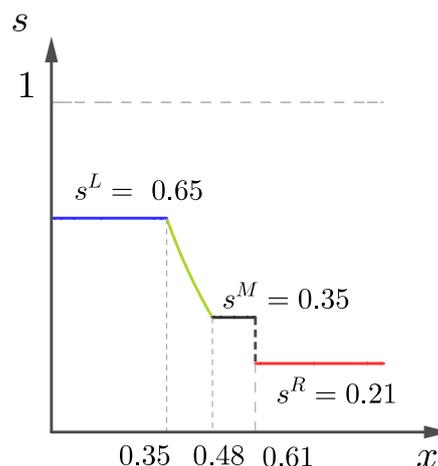


Figura 11. Solução do Problema de Riemann no Espaço sx para $t = 0.44$.

A Figura 11 ilustra as saturações das fases aquosa e oleosa no instante $t = 0.44$. Observe que, no decorrer do tempo, a saturação da fase aquosa aumenta enquanto do óleo diminui dentro do reservatório.

Estes exemplos não provém de um reservatório petrolífero real. Todavia, a solução do modelo matemático expressa informações relevantes que podem ser utilizadas para análise de viabilidade do uso de polímero como ferramenta de extração. Além disso, com a solução, pode-se fazer uma otimização do uso do polímero, uma vez que este componente possui um custo para a empresa que está extraído o óleo e o seu uso em excesso pode causar um dano maior ao meio ambiente.

Referências

Corey, A. T. (1954). The Interrelation Between Gas and Oil Relative Permeabilities. *Producers Monthly*, (19):38–41.



- LeFloch, P. G. (2002). *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. 1da edition.
- Lima, E. D. (2015). O problema de riemann para um modelo de injeção de polímero em meio poroso com efeito de adsorção. Master's thesis, UFCG.
- Liu, T.-P. (1974). The Riemann Problem for General 2×2 Conservation Laws. *Trans. Amer. Math. Soc.*, (199):89–112.
- Menezello, M. D. C. (2009). *Comentários à Lei de Petróleo*. 2da edition.
- Peaceman, D. W. (1977). *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*.
- Silva, K. A. (2015). O Problema de Riemann para um Modelo de Injeção de Polímero. Master's thesis, UFCG.
- Smoller, J. (1994). *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. 2da edition.
- Thomas, J. E. (2001). *Fundamentos de Engenharia de Petróleo*.