



Soluções de Choque, Rarefação e Compostas para o problema de Riemann com função fluxo cúbica

João P. da C. Ferreira¹, Edwin P. L. Bambarén¹

¹Universidade Federal do Roraima (UFRR)
Boa Vista – RR – Brazil

joaopaulo.314@outlook.com, edwin.lopez@ufrr.br

Abstract. *In this paper we present solutions of shock, rarefaction and composite for the Riemann problem for the Burgers align and the Riemann problem for the cubic flow, in both cases the Scalar Conservation Law was considered. The solutions of shock and rarefaction were obtained in the first case and shock, rarefaction and composite solutions in the second case.*

Resumo. *Neste artigo é apresentado as soluções de choque, rarefação e composta para o problema de Riemann para a equação de Burgers e o problema de Riemann para o fluxo cúbico, em ambos os casos foi considerado a Lei de Conservação Escalar. Foi obtido as soluções de choque e rarefação no primeiro caso e soluções de choque, rarefação e composta no segundo caso.*

1. Introdução

De maneira geral, problemas físicos em dinâmica dos fluidos possuem elementos básicos em comum, como por exemplo: densidade do fluido, viscosidade, porosidade do meio, transferência de massa, entre outros; estes elementos estão relacionado entre eles por certas leis. Para o entendimento de algumas destas leis, na Seção 2 apresentamos a Lei de Darcy e a Lei de Conservação de Massa, mostrando uma modelagem do fluxo de fluido através de uma caixa porosa. Neste trabalho, é deixado em aberto se há um caso particular que conecta este modelo e a equação de Burgers, para trabalhos futuros.

Com caráter introdutório, na Seção 3 é mostrada a solução para a equação de transporte, em seguida, na Seção 4 é solucionada a lei de conservação sujeita a uma condição inicial. A equação de transporte e a equação de Burgers são ambas casos particulares da lei de conservação e suas soluções podem ser obtidas pelo mesmo processo desde que se tenha o devido cuidado. As soluções descontínuas para as leis de conservação são frequentes, e para uma aplicação física é necessário introduzir a condição de *Rankine-Hugoniot*.

Na Seção 5, abordamos o problema de Riemann para a equação de Burgers, cuja solução é obtida baseada na teoria desenvolvida na Seção 4. Para finalizar, apresentamos a desigualdade de Oleinik e a utilizamos para resolver o problema presente na Seção 6, nomeamos tal problema de problema de Riemann para o fluxo cúbico.

2. Construção do modelo matemático

2.1. Lei de Darcy

Em dinâmica dos fluidos, a lei que rege o comportamento dos fluidos escoando em meios porosos é a conhecida lei de Darcy. Para o fluxo de um fluido em uma direção com uma

vazão Q através de uma amostra de um material poroso com comprimento L e seção transversal com área A , a lei de Darcy é expressado como se segue:

$$|v_m| = \frac{Q}{A} = \frac{K}{\mu} \frac{|\Delta p|}{L},$$

onde K é a permeabilidade absoluta, μ é a viscosidade do fluido, Δp é a variação de pressão e v_m é a velocidade em que o fluido escoa.

Generalizando, para o fluido escoando na direção x e levando a gravidade em consideração, temos

$$v_x = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \frac{\partial D}{\partial x} \right) \quad (1)$$

sendo ρ a densidade do fluido, g a aceleração gravitacional e D uma função que descreve a profundidade. Note que o sinal negativo de (1) indica que a pressão diminui na direção do fluido.

Para o fluxo escoando nas três dimensões espaciais convencionais e que $v = (v_x, v_y, v_z)$, vale

$$v = -\frac{K}{\mu} (\nabla p - \rho g \nabla D).$$

2.2. Modelagem do fluxo em um reservatório

Agora vamos modelar a equação para um fluido compressível escoando em uma única direção em um reservatório poroso e, posteriormente, será mencionado brevemente como estender para duas ou três dimensões. Suponha uma pequena caixa contida em um reservatório em que a área de qualquer seção transversal depende unicamente da posição x e que se tenha uma porosidade variável ϕ neste reservatório, conforme a Figura 1.

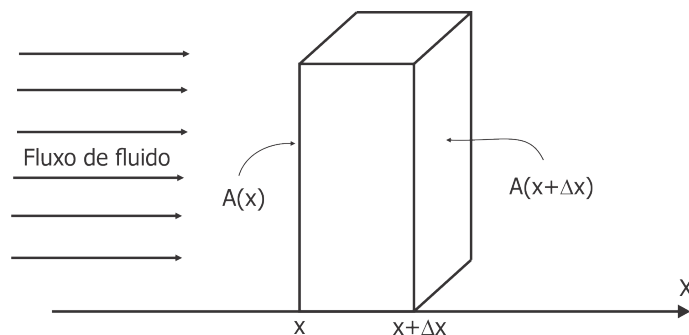


Figura 1. Pequena caixa contida num reservatório.

Gostaríamos que esta equação que obteremos dependesse de termos presentes na Lei de Darcy, então definiremos a densidade ρ e a profundidade D como funções dependentes da variável x , conforme (1), com a possibilidade de que a porosidade do meio considerado possa variar com o tempo, assim como a densidade ρ (por hipótese, o fluido é compressível). Consideremos, também, que temos um termo para injeção de massa de

fluido por unidade de volume dado por q na região em que estamos analisando. Sob essas condições, vamos avaliar o que ocorre em termos de transferência de massa em uma pequena caixa no reservatório considerado.

Conforme mostra a Figura 1, a caixa possui comprimento Δx . Para o fluxo de fluido no sentido mostrado, temos uma taxa de fluxo de massa atravessando a face esquerda da caixa na posição x e, nesta posição, temos uma área $A(x)$, uma densidade $\rho(x, t)$ e uma velocidade $v_x(x)$. Sem dificuldade, vemos que a taxa t_{lf} de massa de fluido que entra por esta face é dada por:

$$t_{lf} = A(x)\rho(x, t)v_x(x). \quad (2)$$

Para a obtenção da expressão (2) devemos pensar em vazão como taxa de transferência de volume e fazer extensão desse conceito para transferência de massa. Analogamente, obtém-se para a face direita da caixa, a taxa t_{rf} de transferência de massa de fluido saindo por esta face como sendo:

$$t_{rf} = A(x + \Delta x)\rho(x + \Delta x, t)v_x(x + \Delta x) \quad (3)$$

A taxa de injeção de massa de fluido por unidade de volume é dada pela função q (O valor q negativo indica produção). Então, seja $A(x^*)$ uma média tal que o volume da caixa seja $A(x^*)\Delta x$ para algum x^* entre x e $x + \Delta x$. Assim, a taxa de injeção de massa t_{mi} será expressa por:

$$t_{mi} = q^* A(x^*)\Delta x \quad (4)$$

sendo q^* uma média para q . A quantidade de massa no interior da caixa é $\phi^* \rho^* A(x^*)\Delta x$ onde ϕ^* é uma média da porosidade na caixa e ρ^* é uma média da densidade. Então, a taxa de acumulação de massa t_{ra} no interior da caixa é dada como:

$$t_{ra} = \frac{\partial(\phi^* \rho^*)}{\partial x} A(x^*)\Delta x \quad (5)$$

e, finalmente, sabemos que a quantidade total de massa precisa ser conservada. Portanto, a partir de (2), (3), (4) e (5), chegamos na seguinte equação

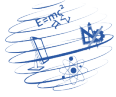
$$A(x)\rho(x, t)v_x(x) - A(x + \Delta x)\rho(x + \Delta x, t)v_x(x + \Delta x) + q^* A(x^*)\Delta x = \frac{\partial(\phi^* \rho^*)}{\partial x} A(x^*)\Delta x,$$

e dividindo ambos os lados da equação por Δx e fazendo Δx ir para zero, sob condições adequadas,

$$-\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(x + \Delta x)\rho(x + \Delta x, t)v_x(x + \Delta x) - A(x)\rho(x, t)v_x(x)}{\Delta x} + qA(x) = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} A(x)$$

onde o limite restante na expressão é uma derivada parcial. Concluimos então a seguinte equação:

$$-\frac{\partial(\rho v_x A)}{\partial x} + qA = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} A, \quad (6)$$



que é a equação que modela um fluxo sob as condições propostas em uma única direção.

Para estender para duas ou três dimensões segue um processo similar. A taxa de passagem de massa pelas faces da caixa é $\rho v A$, a taxa de injeção de massa de fluido segue como sendo qV_{caixa} onde V_{caixa} é o volume da caixa considerada e a quantidade de massa acumulada será $\rho\phi V_{\text{caixa}}$. Então, basta definir a forma dessas expressões mencionada para o caso em duas e três dimensões. Essencialmente, as expressões que modelam o escoamento de um fluido em uma caixa para duas e três dimensões são, respectivamente:

$$-\frac{\partial(\rho v_x H)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v_y H)}{\partial y} + qH = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} H \quad (7)$$

e

$$-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + q = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t}. \quad (8)$$

Note que o termo H inserido na equação (7) é a altura da caixa em função das variáveis x e y . Observe também que as equações obtidas diferem apenas por um fator geométrico, sendo um fator bidimensional para a equação (6), unidimensional para a equação (7) e este fator é adimensional em (8).

3. A Equação de Transporte

Estamos interessados em obter uma solução para a Equação (9), conhecida como equação de transporte homogênea. O objetivo é utilizar o método de solução da equação de transporte para analisar e construir soluções para um problema um pouco mais geral.

Seja a equação

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, & \text{em } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \text{ e } c \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x), & \text{em } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (9)$$

Queremos determinar de forma explícita da função $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, sujeita a uma condição inicial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sendo $f \in C^1$ uma função conhecida e $u \in C^1$. Para isto, utilizaremos o método das curvas características. Considere um ponto arbitrário $P = (x_0, t_0)$ e defina uma curva $x(t)$ que passa por P de forma que

$$\frac{dx}{dt} = c, \quad x(t_0) = x_0. \quad (10)$$

Temos condições suficientes de determinar a forma da curva $x(t)$, afinal este é um caso básico de equações diferenciais e pode ser resolvido pelo método de separação de variáveis. Como $\frac{dx}{dt} = c$, decorre:

$$\begin{aligned} \int dx &= \int c dt, \\ x(t) &= ct + k, \quad k \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (11)$$

e, pela condição inicial $x(t_0) = x_0$ conclui-se que $k = x_0 - ct_0$. Portanto,

$$x(t) = c(t - t_0) + x_0 \quad (12)$$



Seja $u(x(t), t)$ os valores que a função u toma ao longo da reta (12). Como u é de classe C^1 faz sentido calcular $\frac{du}{dt}$, assim

$$\frac{du(x(t), t)}{dt} = u_x \frac{dx}{dt} + u_t = u_t + c u_x,$$

como a função u é solução de (9), decorre:

$$\frac{du(x(t), t)}{dt} = 0.$$

Portanto, ao longo de uma reta $x(t)$ definida a partir de (10) a função u é constante. Em outras palavras, o valor de u ao longo de $x(t)$ só depende de $u(x(0), 0)$, ou seja,

$$u(x(t), t) = f(x_0 - ct_0).$$

Como a função u é constante ao longo de qualquer reta $x(t)$ tal que $\frac{dx}{dt} = c$, podemos escolher qualquer ponto P e generalizar o resultado acima para qualquer ponto (x, t) . Então, a solução para (9) é dada por

$$u(x, t) = f(x - ct). \quad (13)$$

A obtenção de uma solução para a equação de transporte não-homogênea é análoga ao caso homogêneo. Tal equação é da forma:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = g(x, t), & \text{em } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \text{ e } c \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x), & \text{em } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (14)$$

onde $g : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua dada. Assim como no caso anterior, defina uma curva conforme (10), então

$$\frac{du(x(t), t)}{dt} = u_x \frac{dx}{dt} + u_t = u_t + c u_x = g(x(t), t).$$

Pelo resultado acima, podemos obter u de forma explícita da seguinte forma:

$$u(x_0, t_0) - f(x_0 - ct_0) = \int_0^{t_0} \frac{du(x(t), t)}{dt} dt,$$
$$u(x_0, t_0) = f(x_0 - ct_0) + \int_0^{t_0} \frac{du(x(t), t)}{dt} dt = f(x_0 - ct_0) + \int_0^{t_0} g(x(t), t) dt.$$

Podemos generalizar o resultado acima para a forma

$$u(x, t) = f(x - ct) + \int_0^t g(x(s), s) ds, \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty). \quad (15)$$

Nesta última forma, a partir de (12)

$$x(s) = c(s - t) + x,$$

onde (x, t) é um ponto arbitrário em $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$.

4. Leis de Conservação

Temos por objetivo determinar e analisar soluções de equações da forma

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (16)$$

sendo $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Frequentemente, autores nomeiam as equações que obedecem (16) como *lei de conservação*, pois estas equações surgem em modelagens de problemas físicos envolvendo leis conservativas.

Mais especificamente, voltaremos atenção a problemas da forma (16) sujeitos a uma condição inicial $u(x, 0) = u_0(x)$ para $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada. Ou seja, problemas como abaixo.

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Observe que, sob as hipóteses dadas e com a regra da cadeia, o sistema acima pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} u_t + f'(u)u_x = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (17)$$

Note que (17) se assemelha com a equação de transporte homogênea. Podemos resolver (17) de modo semelhante ao utilizado para resolver o problema (9). Defina uma curva característica como a curva $x : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que passa pelo ponto $P = (x_0, t_0)$ arbitrário, de modo que

$$\frac{dx}{dt} = f'(u(x, t)), \quad x(t_0) = x_0. \quad (18)$$

Então, ao longo da curva $x(t)$, temos $\frac{du(x(t), t)}{dt} = 0$. De fato,

$$\frac{du(x(t), t)}{dt} = u_x \frac{dx}{dt} + u_t = u_x f'(u) + u_t = 0.$$

Portanto, ao longo da curva $x(t)$, a função u é constante e (18) define uma reta chamada *reta característica*. Assim, o valor da função u avaliada em P só depende de algum ponto de u conhecido sobre reta $x(t)$, particularmente o ponto $u(x(0), 0)$, ou seja

$$u(x_0, t_0) = u_0(x_0 - t_0 f'(u(x_0, t_0))).$$

Generalizando, seja P qualquer ponto em $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$, u avaliada em P será dada por

$$u(x, t) = u_0(x - t f'(u)) \quad (19)$$

A expressão acima fornece, de fato, uma solução para o problema (17) mas, mesmo com as hipóteses propostas sobre a função u , (19) pode não ser uma solução para

todo o domínio de u . Afinal, a inclinação das retas características é variável conforme (18), logo não é difícil que duas características se encontrem em algum ponto. Vejamos o que ocorre neste caso.

Defina duas retas características, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ distintas com $x_1(0) = a$, $x_2(0) = b$ e $a \neq b$, conforme a Figura 2.

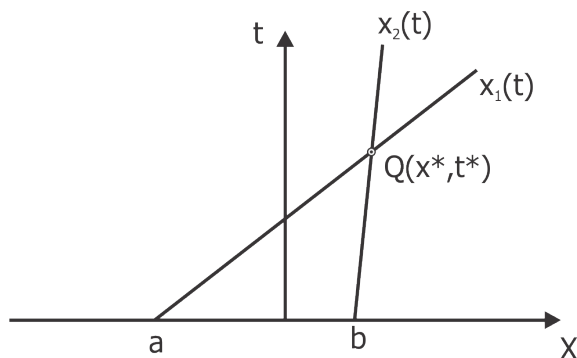


Figura 2. Cruzamento de retas características.

Seja $Q = (x^*, t^*)$ o ponto em que as retas características $x_1(t)$ e $x_2(t)$ coincidem. Suponha que a função u avaliada no ponto Q esteja bem definida. Como ao longo de uma curva característica a função u é constante, a inclinação da reta $x_1(t)$ é bem definida e igual a $f'(u(x^*, t^*))$. Analogamente, a inclinação da reta $x_2(t)$ é bem definida e igual a $f'(u(x^*, t^*))$. Portanto, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são retas com inclinações iguais e com o ponto Q em comum, portanto são retas iguais, mas isso contraria a hipótese de que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são retas distintas. Portanto a função u avaliada no ponto Q não pode ser bem definida.

Contudo, a solução (19) é obtida baseada na hipótese $u \in C^1$. Podemos enfraquecer essa hipótese e obter soluções assumindo u , pelo menos, mensurável. Seja R o conjunto $R = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty); a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq t \leq T\}$. Defina como C_0^1 o conjunto de todas as funções contínuas ϕ tais que $\phi = 0$ fora do conjunto compacto R . Mais especificamente, tome $\phi(x, t) = 0$ para todo $(x, t) \notin R$, além disso, $\phi(x, t) = 0$ nas retas $x = a$, $x = b$ e $t = T$.

Definição 4.1. Uma função limitada e mensurável u é chamada de solução fraca do problema (17) com condição inicial limitada e mensurável u_0 se

$$\iint_{t \geq 0} (u \phi_t + f(u) \phi_x) dx dt + \int_{t=0} u_0 \phi dx = 0 \quad (20)$$

para qualquer $\phi \in C_0^1$ definida anteriormente.

Para verificar que a função u nas condições da definição acima é, de fato, solução de (17) basta realizar uma integração por partes. De fato, verifica-se a igualdade

$$\iint_{t \geq 0} u \phi_t dx dt = \int_{t=0} \left(u(x, T) \phi(x, T) - u(x, 0) \phi(x, 0) - \int_0^T u_t \phi dt \right) dx,$$

ressaltando que a função ϕ é nula fora do conjunto R então é equivalente a integrar apenas sobre este conjunto. Conforme definido anteriormente, $\phi = 0$ em $t = T$, logo a igualdade

acima torna-se:

$$\iint_{t \geq 0} u \phi_t dxdt = - \int_{t=0} u_0 \phi dx - \iint_{t \geq 0} u_t \phi dxdt. \quad (21)$$

De modo análogo, verifica-se que

$$\iint_{t \geq 0} f(u) \phi_x dxdt = - \iint_{t \geq 0} f(u)_x \phi dxdt. \quad (22)$$

Substituindo (21) e (22) em (20), obtemos:

$$\iint_{t \geq 0} (u_t + f(u)_x) \phi dxdt = 0,$$

qualquer que seja $\phi \in C_0^1$. Logo $u_t + f(u)_x = 0$ para u sob as condições da Definição 4.1.

Podemos encontrar soluções para (16) com saltos de descontinuidades através de uma curva dada. Seja γ uma curva suave na qual, através de γ , a função u tem um salto de descontinuidade. Considere um ponto C qualquer pertencente à curva γ e defina uma bola B com centro C e raio pequeno conforme a Figura 3 e suponha que a curva γ seja dada por $x = x(t)$ em B .

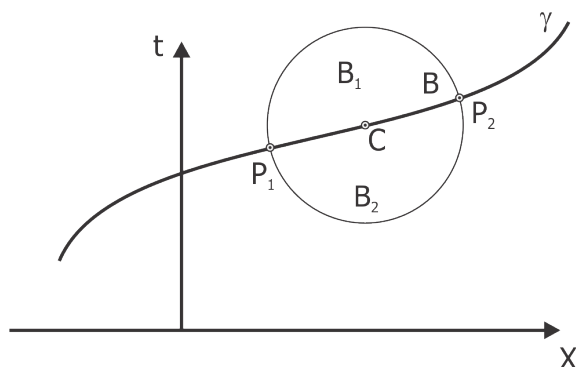


Figura 3. Bola centralizada no ponto C de uma curva suave.

Os pontos P_1 e P_2 são os pontos em que γ toca a fronteira de B . Suponha que a função u tenha limites laterais bem definidos em ambos os lados da curva γ e seja de classe C^1 fora desta curva. Tome $\phi \in C_0^1$ de forma que $\phi = 0$ no exterior e na fronteira da bola B . Nessas condições, vale:

$$\iint_B (u \phi_t + f(u) \phi_x) dxdt = 0. \quad (23)$$

Sejam B_1 e B_2 as partes da bola B acima e abaixo da curva γ , respectivamente. Então,

$$\iint_B (u \phi_t + f(u) \phi_x) dxdt = \iint_{B_1} (u \phi_t + f(u) \phi_x) dxdt + \iint_{B_2} (u \phi_t + f(u) \phi_x) dxdt.$$



No interior de B_1 , vale a igualdade

$$\iint_{B_1} (u \phi_t + f(u) \phi_x) dx dt = \iint_{B_1} [(u \phi)_t + (f(u) \phi)_x] dx dt,$$

pois u é C^1 nesta região. Pelo teorema de Green, obtemos

$$\iint_{B_1} (u \phi_t + f(u) \phi_x) dx dt = \oint_{\partial B_1} \phi [-u dx + f(u) dt].$$

Como $\phi = 0$ na fronteira de B , esta integral de linha será não-nula apenas ao longo de γ . Seja u_s o valor que a função u admite quando se aproxima da curva γ por B_1 , então

$$\iint_{B_1} (u \phi_t + f(u) \phi_x) dx dt = \int_{P_1}^{P_2} \phi [-u_s dx + f(u_s) dt]. \quad (24)$$

Analogamente, seja u_i o valor que a função u admite quando se aproxima da curva γ por B_2 , vale a igualdade

$$\iint_{B_2} (u \phi_t + f(u) \phi_x) dx dt = - \int_{P_1}^{P_2} \phi [-u_i dx + f(u_i) dt]. \quad (25)$$

Somando (24) com (25) e, por (23), temos

$$\int_{P_1}^{P_2} \phi [-(u_s - u_i) dx + (f(u_s) - f(u_i))] dt = 0,$$

ou seja, temos a relação

$$\sigma = \frac{dx}{dt} = \frac{f(u_s) - f(u_i)}{u_s - u_i}, \quad (26)$$

que é chamada de *condição de salto* ou, como é conhecida em dinâmica dos gases, condição de *Rankine-Hugoniot*.

5. O problema de Riemann para a equação de Burgers

O problema de Riemann trata-se, essencialmente, de um problema de condição inicial. De maneira geral, podemos considerar o problema de Riemann para a lei de conservação, conforme segue:

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_l, & \text{se } x < 0, \\ u_r, & \text{se } x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (27)$$

para $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções e u_l, u_r constantes arbitrárias. Particularmente, quando $f(u) = \left(\frac{u^2}{2}\right)$, temos o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_l, & \text{se } x < 0, \\ u_r, & \text{se } x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (28)$$

que é o problema de Riemann para a *equação de Burgers*. Mais precisamente, a equação $u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x$ é conhecida como equação de Burgers sem viscosidade. Temos por objetivo resolver o problema (28). Para isso, temos alguns casos básicos para considerar: $u_l = u_r$ e $u_l \neq u_r$.

O caso $u_l = u_r$ possui solução trivial. Pois, suponha $u_l = u_r = u^*$, então, por (19), temos

$$u(x, t) = u_0 \left(x - t \frac{2u}{2} \right) = u_0(x - tu).$$

Se $x - tu < 0$, então $u(x, t) = u^*$ sempre que $x < tu^*$. Analogamente, $u(x, t) = u^*$ sempre que $x > tu^*$. Então

$$u(x, t) = u^*, \quad x \neq tu^*.$$

Se $u_l \neq u_r$, temos dois casos possíveis: $u_l > u_r$ e $u_l < u_r$. Suporemos que $u_l > 0$, porém, enfatizo que a obtenção da solução de (28) para $u_l < 0$ é inteiramente análoga.

Considere o caso $u_l > u_r$ e $u_l > 0$. Para a equação de Burgers, a inclinação das retas características é dada por $\frac{dx}{dt} = u(x(t), t)$. Por (19), obtemos que $u(x, t) = u_l$ e $\frac{dx}{dt} = u_l$ sempre que $x < tu_l$. E também, $u(x, t) = u_r$ e $\frac{dx}{dt} = u_r$ sempre que $x > tu_r$. Porém, há encontro de retas características conforme ilustrado abaixo.

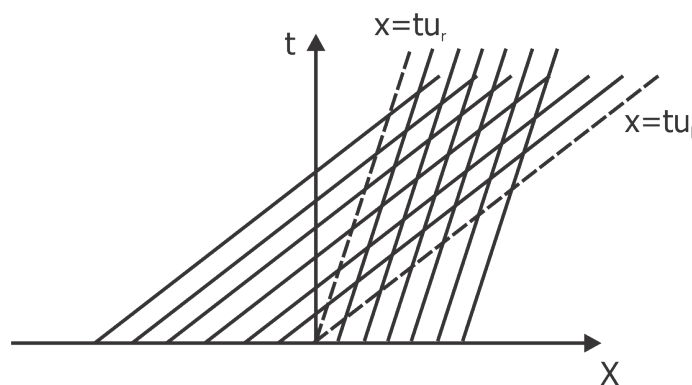


Figura 4. Retas características no caso $u_l > u_r$ e $u_l > 0$.

Suponha que a função u tenha limites laterais, u_l e u_r , bem definidos ao redor de uma certa curva γ . (γ definida como na seção anterior). Então, pela condição de Rankine-Hugoniot, temos

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{u_l^2 - u_r^2}{u_l - u_r} = \frac{1}{2}(u_l + u_r).$$

Então, a solução para u poderá ser dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l, & x < \sigma t \\ u_r, & x > \sigma t \end{cases} \quad (29)$$

Agora, considere $0 < u_l < u_r$. Graficamente, podemos ver que as retas características não se encontram, conforme a Figura 5.

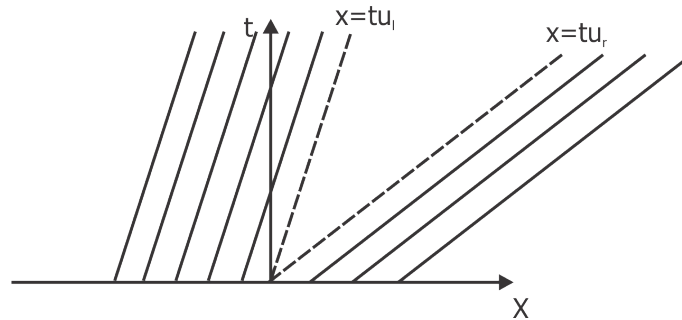


Figura 5. Retas características no caso $0 < u_l < u_r$.

Sob essas condições, uma solução para (28) pode ser obtida diretamente por (19). Seja $u(x, t) = u_0(x - tu)$, se $x < tu$, então

$$u(x, t) = u_l, \quad x < tu_l.$$

Analogamente,

$$u(x, t) = u_r, \quad x > tu_r.$$

Ou seja,

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l, & x < tu_l \\ u_r, & x > tu_r \end{cases} \quad (30)$$

É notável que a expressão (30) é uma solução para o problema (28). Porém, a região $tu_l < x < tu_r$ não faz parte do domínio desta solução. Podemos “preencher” esta região da seguinte forma: Suponha que a função u possa ser escrita como

$$u(x, t) = w(\xi), \quad \xi = \frac{x}{t}, \quad t \neq 0. \quad (31)$$

Como u é solução da equação de $u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\xi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{w^2(\xi)}{2} \right] &= 0, \\ w_\xi(-\xi + w(\xi)) &= 0. \end{aligned}$$

Se $w_\xi \neq 0$, então:

$$w(\xi) = \xi.$$

Ou seja, $u(x, t) = \frac{x}{t}$. Tome $\xi \in (u_l, u_r)$, então $u_l < \frac{x}{t} < u_r$, ou seja, $tu_l < x < tu_r$. Então, a solução de u pode ser dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l, & x < tu_l, \\ \frac{x}{t}, & tu_l < x < tu_r, \\ u_r, & x > tu_r. \end{cases} \quad (32)$$

De maneira geral, é possível encontrar soluções propondo o problema de Riemann para a lei de conservação com formas semelhantes a (29) ou (32), desde que a função f obedeça algumas condições.

Observe que a solução (29) foi obtida para a equação de Burgers supondo $u_l > 0$ e $u_l > u_r$. Ou seja, dado u_l um número real fixo e positivo, qualquer escolha de $u_r < u_l$ proporciona uma solução para (28) conforme (29). O mesmo ocorre para $u_l > 0$ fixo e $u_r > u_l$, então (32) será solução de (28) para qualquer escolha de u_r .

Soluções como (29) e (32) são conhecidas como *onda de choque* e *onda de rarefação*, respectivamente.

Defina como $S(u_l)$ o conjunto que, dado $u_l > 0$ fixo, qualquer escolha de u_r pertencente a este conjunto ocasiona uma solução do tipo onda de choque. Defina, também, como $R(u_l)$ o conjunto que, dado $u_l > 0$ fixo, qualquer escolha de u_r pertencente a este conjunto ocasiona uma solução do tipo onda de rarefação. Ou seja, dado $u_l > 0$ fixo, o problema de Riemann para a equação de Burgers possui as seguintes soluções:

- $S(u_l) = (-\infty, u_l)$;
- $R(u_l) = (u_l, +\infty)$.

6. O problema de Riemann para o fluxo cúbico

Costuma-se nomear a função f presente na equação $u_t + f(u)_x = 0$ como fluxo. Consideremos o caso particular em que o fluxo f é tal que $f(u) = \frac{1}{3}u^3$. Então, vejamos como resolver o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{u^3}{3}\right)_x = 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_l, & \text{se } x < 0, \\ u_r, & \text{se } x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (33)$$

para algum par de constantes reais u_l e u_r .

Novamente, tome $u_l > 0$ fixo e suponha $u_l \neq u_r$. Verifica-se que a inclinação das retas características para o problema (33) é dada por

$$\frac{dx}{dt} = u^2. \quad (34)$$

Suponha $u_l < u_r$. Por (19), $u(x, t) = u_l$ sempre que $x < tu_l^2$ e $u(x, t) = u_r$ sempre que $x > tu_r^2$. Ou seja, por (34), temos retas características com inclinação u_l^2 na região $x < tu_l^2$ e retas características com inclinação u_r^2 na região $x > tu_r^2$, conforme a Figura 6.

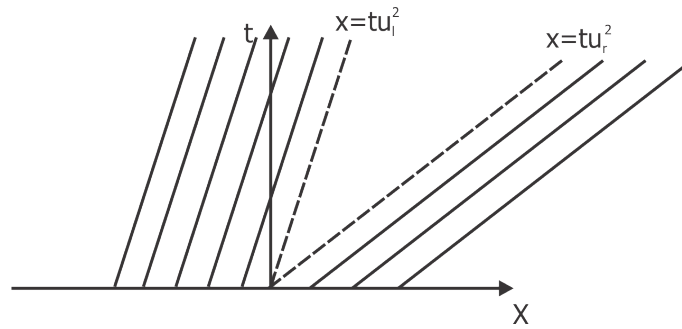


Figura 6. Retas características para o problema (33) e $u_l < u_r$.

Suponha que a função u possa ser escrita conforme (31). Então, vale:

$$\frac{\partial w(\xi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{w^3(\xi)}{3} \right] = 0,$$

e, utilizando a regra da cadeia e supondo $w_\xi \neq 0$, vale

$$|u(x, t)| = |w(\xi)| = \sqrt{\xi}, \quad \xi \geq 0. \quad (35)$$

Portanto, se $u(x, t) \geq 0$, $u(x, t) = \sqrt{\frac{x}{t}}$. Se $u(x, t) \leq 0$, $u(x, t) = -\sqrt{\frac{x}{t}}$.

Queremos determinar uma solução do tipo onda de rarefação “conectando” u_l à u_r . Com a condição $u_r > u_l > 0$, sabemos que $u(x, t) > 0$. Portanto, na região $tu_l^2 < x < tu_r^2$, $u(x, t) = \sqrt{\frac{x}{t}}$. Ou seja,

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l, & x < tu_l^2, \\ \sqrt{\frac{x}{t}}, & tu_l^2 < x < tu_r^2, \\ u_r, & x > tu_r^2. \end{cases} \quad (36)$$

Portanto, para o problema (33), $R(u_l) = (u_l, +\infty)$ sempre que $u_l > 0$. Observe que, na região $tu_l^2 < x < tu_r^2$, cada $\lambda = \frac{x}{t}$ escolhido, u é constante ao longo da reta $x = \lambda t$. E ainda, na região $tu_l^2 < x < tu_r^2$ o comportamento das retas características se assemelha a um leque, conforme a Figura 7.

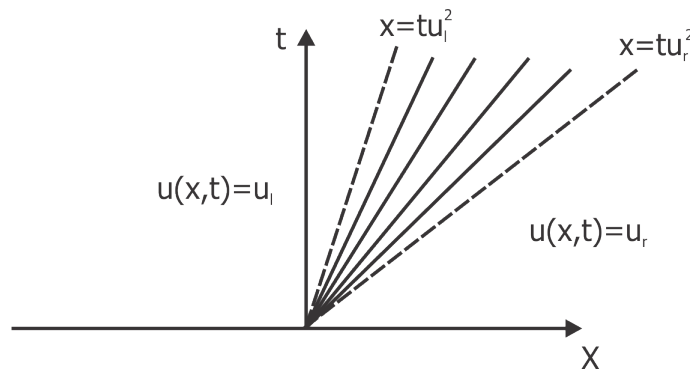


Figura 7. Retas características para solução do tipo rarefação para o fluxo $\frac{u^3}{3}$.

Com objetivo de identificar soluções do tipo onda de choque, é de grande utilidade o seguinte teorema.

Teorema 6.1 (Desigualdade de entropia de Oleinik). *Uma solução de onda de choque para a lei de conservação tendo a forma*

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l, & x < \sigma t \\ u_r, & x > \sigma t \end{cases}, \quad \sigma = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}$$

para algum par de constantes u_l e u_r ($u_l \neq u_r$), satisfaz a desigualdade

$$\frac{\partial[U(u)]}{\partial t} + \frac{\partial[F(u)]}{\partial x} \leq 0, \quad \text{para qualquer par de entropias convexas } (U, F)$$

se, e somente se, a desigualdade de entropia de Oleinik

$$\frac{f(v) - f(u_l)}{v - u_l} \geq \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} \quad (37)$$

é satisfeita para todo v entre u_l e u_r .

Note que este teorema trata de problemas mais gerais do que os problemas abordados aqui. Portanto, para mais detalhes sobre este teorema e algumas de sua consequência, veja a referência bibliográfica [LeFloch 2002].

Contudo, o Teorema 6.1 fornece uma solução para a função u sempre que a inequação de Oleinik é satisfeita. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma dada função suave, geometricamente é simples visualizar quando a inequação de Oleinik vale. Considere o seguinte gráfico:

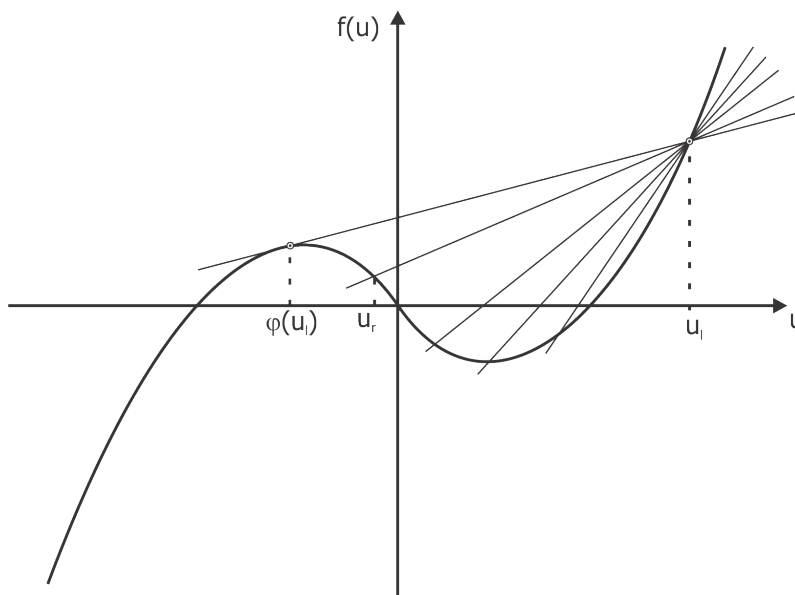


Figura 8. Interpretação da desigualdade de Oleinik.

Observe que, para o gráfico da Figura 8, dado u_l fixo, tomando $u_r > u_l$, (37) não é satisfeito. Se $u_r < \varphi(u_l)$, sendo $\varphi(u_l)$ algum elemento no domínio de f , a desigualdade (37) não é satisfeita para todo v entre u_r e u_l . Se $u_r \in [\varphi(u_l), u_l)$, inequação

(37) é satisfeita para qualquer v entre u_r e u_l . O valor $\varphi(u_l)$ apresenta papel importante neste contexto. O valor $\varphi(u_l)$ é tal que, dado u_l , a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(\varphi(u_l), f(\varphi(u_l)))$ é igual à inclinação da reta que passa pelos pontos $(\varphi(u_l), f(\varphi(u_l)))$ e $(u_l, f(u_l))$. Ou seja, f' avaliada em $\varphi(u_l)$ é tal que

$$f'(\varphi(u_l)) = \frac{f(u_l) - f(\varphi(u_l))}{u_l - \varphi(u_l)}, \quad \varphi(u_l) \neq u_l. \quad (38)$$

O valor de $\varphi(u_l)$ é o que diz “até onde” (37) vale, quando $\varphi(u_l)$ existir.

Embora o Teorema 6.1 forneça uma solução para o problema (27), nem sempre é uma tarefa simples garantir que as condições deste teorema serão satisfeitas. De maneira geral, quanto maior a quantidade de pontos de inflexão presentes no gráfico de f , mais complicado se torna o problema.

Se $u_l > u_r$, podemos utilizar o Teorema 6.1 para determinar a solução de (33). Como $f(u) = \frac{u^3}{3}$, temos o seguinte gráfico:

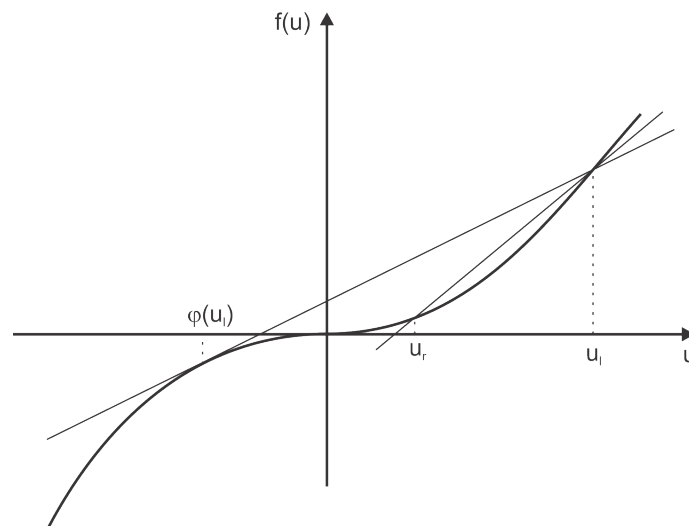


Figura 9. Gráfico da função $f(u) = \frac{u^3}{3}$.

Graficamente, podemos notar que, dado $u_r \in (\varphi(u_l), u_l)$, vale a desigualdade de Oleinik para todo v entre u_l e u_r . Porém, para $u_r \in (-\infty, \varphi(u_l))$, não podemos afirmar o mesmo.

Dado $u_l \neq 0$ fixo, o valor de $\varphi(u_l)$ relacionado é bem definido. De fato, por (38),

$$\varphi^2(u_l) = \frac{1}{3} \frac{u_l^3 - \varphi^3(u_l)}{u_l - \varphi(u_l)}, \quad u_l \neq \varphi(u_l).$$

Ou seja, simplificando e reorganizando, temos

$$\begin{aligned} 0 &= u_l^2 + u_l \varphi(u_l) - 2\varphi^2(u_l) = (u_l - \varphi(u_l))(u_l + 2\varphi(u_l)), \\ 0 &= (u_l - \varphi(u_l))(u_l + 2\varphi(u_l)). \end{aligned}$$

Como $u_l \neq \varphi(u_l)$, decorre $u_l + 2\varphi(u_l) = 0$, então:

$$\varphi(u_l) = -\frac{1}{2}u_l. \quad (39)$$

Portanto, para $u_r \in \left(-\frac{1}{2}u_l, u_l\right)$, o Teorema 6.1 é satisfeito. Então, sob essas condições, temos a seguinte solução:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l, & x < \sigma t \\ u_r, & x > \sigma t, \end{cases} \quad \sigma = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}. \quad (40)$$

Ou seja, para o problema (33), $S(u_l) = \left(-\frac{1}{2}u_l, u_l\right)$ sempre que $u_l > 0$.

Se $u_r \in (-\infty, \varphi(u_l))$, temos uma solução *composta*. Podemos notar que as retas características se encontram para uma determinada faixa de valores de $u_r \in (-\infty, \varphi(u_l))$. A saber, sempre que $|u_r| < |u_l|$. Podemos “conectar” u_l à $\varphi(u_l)$ utilizando onda de choque e, em seguida, “conectar” $\varphi(u_l)$ à u_r com onda de rarefação. Como u_l é um número positivo, por (39) vemos que $\varphi(u_l) < 0$. Portanto, como $u_r < \varphi(u_l) < 0$, na região $\varphi^2(u_l)t < x < u_r^2t$ obtemos $u(x, t) = -\sqrt{\frac{x}{t}}$ por consequência de (35). Então, sob essas condições:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l, & x < t\sigma \\ -\sqrt{\frac{x}{t}}, & t\varphi^2(u_l) < x < tu_r^2 \\ u_r, & x > tu_r^2 \end{cases}, \quad \sigma = \frac{f(u_l) - f(\varphi(u_l))}{u_l - \varphi(u_l)} = \varphi^2(u_l), \quad (41)$$

por (39), podemos escrever

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l, & x < \frac{1}{4}u_l^2t, \\ -\sqrt{\frac{x}{t}}, & \frac{1}{4}u_l^2t < x < tu_r^2, \\ u_r, & x > tu_r^2. \end{cases} \quad (42)$$

Soluções como (42) são chamadas de soluções compostas por apresentarem características de soluções do tipo onda de choque e onda de rarefação simultaneamente. Defina como $C(u_l)$ o conjunto em que, dado u_l , qualquer $u_r \in C(u_l)$ ocasiona uma solução composta.

Portanto, dado $u_l > 0$, o problema (33) possui as seguintes soluções:

- $S(u_l) = \left(-\frac{1}{2}u_l, u_l\right)$;
- $R(u_l) = (u_l, +\infty)$;
- $C(u_l) = \left(-\infty, -\frac{1}{2}u_l\right)$.

Para o caso $u_l < 0$, obtém-se a solução de (33) de maneira análoga. Se $u_l = u_r$, obtemos uma solução trivial.



Referências

- Evans, L. C. (2010). *Partial differential equations*. American Mathematical Society, 2da edition.
- LeFloch, P. (2002). *Hyperbolic Equations System of Conservation Laws*. Birkhäuser.
- Peaceman, D. W. (1977). *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*.
- Perko, L. (2000). *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, 3ra edition.
- Smoller, J. (1994). *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Springer, 2da edition.