



Aplicação do Método de Elementos de Contorno para Análise de Potencial de um Sólido Bidimensional

Flávia G. Fernandes¹, Erivan de Paula Santos Neto²

¹Programa de Pós-Graduação em Ciências Exatas e Tecnológicas
Universidade Federal de Goiás (UFG) – Catalão – GO – Brazil

²Universidade Federal de Goiás (UFG) – Catalão – GO – Brazil

flavia.fernandes92@gmail.com, erivandepaula@gmail.com

Abstract. *Solving problems in science and engineering goes through several stages of simplification. Among them is the proposition of the approximate mathematical model, using differential equations. The contour element method is one of the rough methods used in science and engineering. It is applied in the solution of differential equations, where they are transformed into integral equations applied to the contour of the problem. In this line of reasoning, the objective of this work is the implementation of a program for potential analysis of a two-dimensional solid using the Boundary Element Method.*

Resumo. *A solução de problemas em ciência e em engenharia passa por diversas etapas de simplificação. Entre elas está a proposição do modelo matemático aproximado, utilizando-se equações diferenciais. O método dos elementos de contorno é um dos métodos aproximados utilizados em ciência e em engenharia. Ele é aplicado na solução de equações diferenciais, onde estas são transformadas em equações integrais aplicadas ao contorno do problema. Nesta linha de raciocínio, o objetivo deste trabalho é a implementação de um programa para análise de potencial de um sólido bidimensional utilizando o Método de Elementos de Contorno.*

1. Introdução

Grande parte dos problemas em engenharia apresenta complexidade na geometria do sólido ou é constituído de materiais cujas leis constitutivas são bastante complexas [Aliabadi 2003]. Assim sendo, as soluções analíticas dos mesmos, que correspondem às soluções exatas, são praticamente impossíveis de serem obtidas, sendo então necessário a obtenção de soluções aproximadas através de métodos numéricos, onde faz-se também simplificações nas leis constitutivas dos materiais e na geometria do sólido [Alves 2006].

Os métodos numéricos classicamente empregados, como ferramentas básicas na elaboração de sistemas computacionais necessários à análise estrutural, sempre foram os métodos das diferenças finitas e dos elementos finitos, desenvolvidos já há algum tempo [Beer and Watson 1992]. O surgimento do método dos elementos de contorno (MEC) e a sua utilização como uma alternativa para a obtenção de soluções numéricas em quase todos os campos da engenharia representa um avanço significativo que ocorreu nessa área do conhecimento nos últimos anos [Brebbia 1980]. Em muitos problemas, comprovadamente, esse método é uma alternativa mais precisa e que permite a obtenção de respostas mais confiáveis quando comparadas com as dos métodos



usuais [Brebbia and Dominguez 1994]. Em algumas aplicações as equações integrais são representações exatas do modelo matemático utilizado para representar o problema físico, o que, em geral, é traduzido como aumento de confiança nos resultados obtidos [Brebbia et al. 2012].

No caso da análise linear de placas, por exemplo, as representações integrais de deslocamentos, momentos e forças cortantes são exatas; o erro introduzido é devido à aproximação dos valores das variáveis nos elementos definidos ao longo do contorno da placa [Chaves 1997].

Uma das vantagens do método é que, na grande maioria dos casos, nas análises lineares não é necessário discretizar o domínio da estrutura, apenas o contorno da superfície estudada, simplificando com isso a malha da estrutura, o que facilita eventuais modificações na malha e diminui o tempo de processamento do programa [Chueiri 1994]. Além disso, na maioria dos casos, não há necessidade de malhas muito refinadas para se obterem respostas com boa precisão [Fernandes 1998]. Nas análises não-lineares, no entanto, é necessária também a discretização do domínio da superfície em questão, devido ao surgimento na formulação de integrais de domínio que envolvem os esforços de correção que devem ser dados ao longo do processo não-linear para que a estrutura alcance seu equilíbrio [Fernandes 2003].

O método pode ser utilizado para a solução de problemas de análise de temperatura, tensão, torção, difusão, escoamento de fluidos, acústica, eletrostática, dentre outros [Fredholm 1903]. Ele é particularmente mais indicado em casos de concentração de tensão (ou outro tipo de variável), assim como nos casos em que o domínio em estudo tenda ao infinito ou semi-infinito [Rodríguez 1986]. Nesse segundo caso, o uso do MEC facilita bastante a análise, já que no estudo de uma estrutura em contato com um meio infinito, por exemplo o mar, não é necessário fazer a discretização do meio infinito, discretiza-se apenas a estrutura em questão [Kupradze 1965]. Como exemplos de áreas de estudo que possam ter problemas que envolvam domínios infinitos ou semi-infinitos, podem-se citar: mecânica dos solos, aerodinâmica, fundação, engenharia oceânica, dentre outras [Lachat 1975].

O Método dos Elementos de Contorno (MEC), cuja formulação é baseada em equações integrais, surgiu há apenas 30 anos. Porém, desde o início do século, a partir do trabalho de [Fredholm 1903], as equações integrais são utilizadas para a solução de alguns problemas físicos particulares [Telles and Brebbia 1979]. Nos anos sessenta surge a primeira formulação indireta do método dos elementos de contorno, embora ainda não tendo essa denominação, de autoria de [Kupradze 1965], aplicado a problemas potenciais e elásticos.

Somente a partir de 1967, com a publicação do primeiro artigo sobre a formulação direta do método das equações integrais de contorno, para problemas elásticos bidimensionais, de autoria de [Rizzo 1967], é que os métodos integrais começam a despertar interesse na comunidade científica.

A generalização do método para sua utilização ampla em problemas de engenharia ocorre em 1975, com o trabalho de [Lachat 1975], quando as técnicas de resolução das equações integrais começam a ser vistas como métodos numéricos [Telles and Brebbia 1979].



O método passa a ser conhecido como “Método dos Elementos de Contorno”, com a publicação do primeiro livro sobre o método pelo professor [Brebbia 1980], onde o autor formula o método a partir do método dos resíduos ponderados, usando uma função ponderada conveniente [Venturini 1982].

Esse método vem despertando nos pesquisadores dos grandes centros de pesquisa um interesse crescente e que tem resultado em enorme progresso [Calderon 1991]. Praticamente todos os centros de pesquisa importantes dos países mais avançados têm grupos de pesquisadores dedicados ao desenvolvimento dessa técnica [Love 1944].

No Departamento de Estruturas da Universidade de São Paulo em São Carlos, o Prof. Tit. Wilson Sergio Venturini vem desenvolvendo desde meados dos anos 80 diversos trabalhos que utilizam como método numérico o MEC, sendo a maioria deles voltada para a análise de placas [Wrobel 2003]. O primeiro deles foi a tese de doutorado de [de Paiva 1987], onde foi feita a análise linear de pavimentos de edifícios através da associação do MEC com o Método dos Elementos Finitos (MEF). Um dos trabalhos mais recentes desenvolvidos nessa área, sob a orientação do Prof. Venturini, é a tese de doutorado de [Fernandes 2003], onde foi desenvolvida uma nova formulação não-linear para análise de pavimentos de edifícios utilizando-se apenas o MEC. A seguir faz-se um breve resumo de outros trabalhos desenvolvidos nesse departamento utilizando-se o MEC [27]. O trabalho de [Silva 1988] trata-se de placas sobre fundação elástica e na tese [Silva 1996], do mesmo autor, são desenvolvidas combinações do MEC e MEF para o estudo de pavimentos considerando-se as hipóteses de Reissner. [Calderon 1991] e [Manzoli 1992] também estudaram placas sobre fundação elástica, sendo que no primeiro trabalho foram introduzidas aproximações alternativas para a integral de domínio e no segundo foi considerada uma solução fundamental própria. [de Oliveira Neto 1991] analisou placas de borda curva; [Ribeiro 1996] desenvolveu uma formulação de placas com as hipóteses de Reissner considerando não-linearidade física; [Chueiri 1994] implementou a formulação elastoplástica, com modelos particulares de concreto armado, considerando-se as hipóteses de Kirchhoff.

[Ribeiro 1996] complementou a formulação desenvolvida por [Chueiri 1994], considerando outros modelos para o concreto; [Chaves 1997] desenvolveu e implementou a formulação do MEC para placas de espessura variável.

2. Fundamentação Teórica

A solução de problemas em ciência e em engenharia passa por diversas etapas de simplificação. Entre elas está a proposição do modelo matemático aproximado, utilizando-se equações diferenciais. A escolha do método de solução destas equações diferenciais e a simplificação numérica através da discretização do problema.

O método dos elementos de contorno é um dos métodos aproximados utilizados em ciência e em engenharia. Ele é aplicado na solução de equações diferenciais, onde estas são transformadas em equações integrais aplicadas ao contorno do problema. Este por sua vez é discretizado em elementos que podem ser, constantes lineares, quadráticos ou cúbicos.

Na tentativa de se descrever quantitativamente um problema (fenômeno) físico, ou seja, de se obter uma expressão matemática que corresponda ao fenômeno em questão,

inicialmente o problema físico real é substituído por um problema equivalente, mais simples.

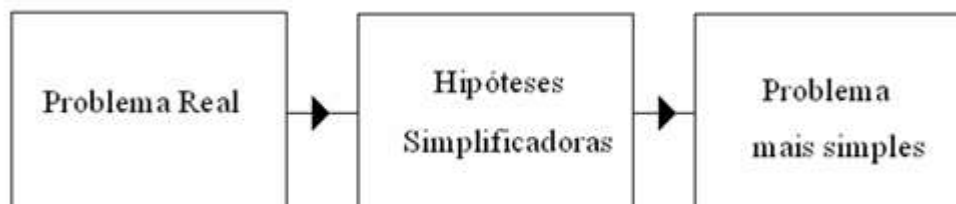


Figura 1. Diagrama de passos simplificadores de um problema real.

Neste novo problema são selecionados os parâmetros considerados fundamentais e que podem ser descritos matematicamente através de um sistema de equações diferenciais válidas em todo o domínio do problema. A esse sistema são impostas condições de contorno e/ou condições iniciais apropriadas.

Quase todos os problemas em ciências físicas e engenharia podem ser reduzidos a uma equação diferencial. Por esta razão saber reconhecer uma equação diferencial dentro de um problema específico é muito importante, para a busca de sua solução. Da mesma forma, saber classificar uma equação diferencial é o primeiro passo na busca de sua solução, pois apesar de não existir um método único para se resolver todas as equações diferenciais, a classificação delas ajuda a escolher o método mais adequado de solução.

Um sistema de equações diferenciais constitui um modelo contínuo, que possui infinitos graus de liberdade, uma vez que as variáveis se distribuem continuamente em todo o domínio do problema. Com exceção de alguns casos mais simples, em geral não é possível encontrar soluções analíticas para o problema. Recorre-se, então, aos modelos discretos (ou numéricos), obtidos dos modelos contínuos através de hipóteses simplificadoras: As variáveis que constituem infinitos graus de liberdade, são expressos em termos de um número finito de graus de liberdade. Esses graus de liberdade são incógnitas dos modelos discretos dos sistemas equivalentes e são determinados a partir da solução de um sistema de equações algébricas.

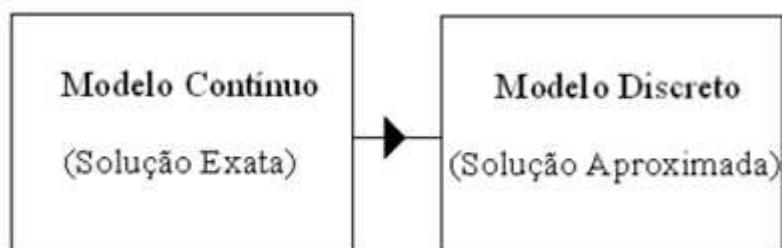


Figura 2. Diagrama de substituição de um Modelo Contínuo exato por um Modelo Discreto Aproximado.

Resumidamente, quando o modelo contínuo é substituído por um modelo discreto, o problema matemático da solução de um sistema de equações diferenciais é substituído pelo problema da solução de um sistema de equações algébricas.

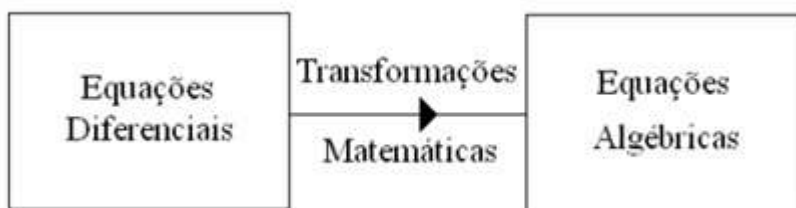


Figura 3. Diagrama de Transformação de Equações Diferenciais em Equações Algébricas equivalentes.

Diversas são as técnicas de aproximação para solução de equações diferenciais e equações integrais. Entre os métodos de equações diferenciais, destacam-se o método das diferenças finitas, o método dos elementos finitos, o método dos volumes finitos, e por último entre os métodos de equações integrais, temos o método dos elementos de contorno. O método dos elementos de contorno consiste em resolver basicamente a equação de Laplace em termos de integrais, ou seja:

$$\underbrace{\nabla^2 \Phi}_{\text{campo escalar}} = 0 \rightarrow \int_{\Gamma} (u * q + q * u) d\Gamma \quad (1)$$

Em todas elas o problema físico é reduzido a um modelo que por sua vez é reduzido a um modelo matemático, conforme mostra o esquema abaixo:

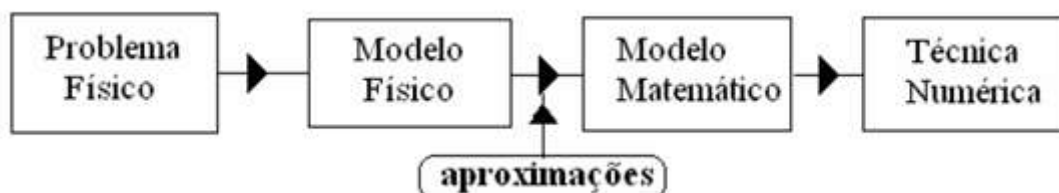


Figura 4. Diagrama de passos simplificadores de um problema real.

O exemplo mais comum é aquele de uma chapa plana sujeita um fluxo térmico q, conforme mostra a Figura 5.

No método dos elementos do contorno, a matriz é cheia, ou seja, completa.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}}_Y \quad (2)$$

O método dos elementos de contorno se aplica aos diferentes problemas em engenharia, tais como: mecânica da fratura, mecânica do contato, barreira acústica, proteção catódica (em casco de navios e torres de distribuição elétrica), e problemas de elasticidade.

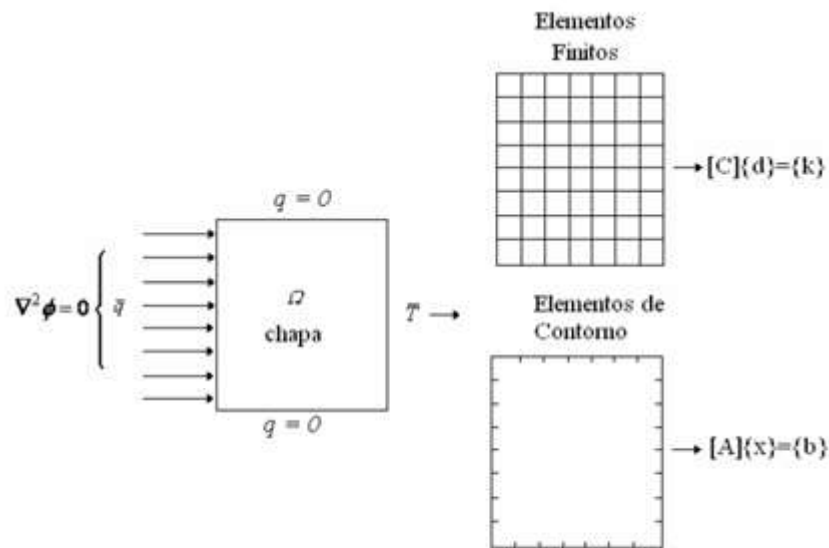


Figura 5. Problema de fluxo de condução de calor em uma chapa plana.

Em todos eles a equação de Laplace possui larga aplicação. Contudo, singularidades fracas e fortes surgem nessas formulações matemáticas, as quais devem ser contornadas por técnicas e artifícios numéricos. Entre elas temos as singularidades do tipo:

$$\int \frac{1}{r^\alpha} dr \quad (3)$$

Onde as funções potenciais geram as singularidades do tipo:

$$\ln(r) \rightarrow \frac{1}{r} e \frac{1}{r^2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{r} \rightarrow \frac{1}{r^2} e \frac{1}{r^3} \quad (5)$$

$$\frac{1}{r^\alpha} \rightarrow \frac{1}{r^{\alpha+1}} e \frac{1}{r^{\alpha+2}} \quad (6)$$

Cujos gráficos são do tipo mostrado na Figura 6.

As vantagens do Método dos Elementos de Contorno são:

1. Precisão dos Resultados;
2. Problemas infinitos ou semi-infinitos (elimina o efeito de bordas);
3. Envolve somente a discretização do contorno o que diminui o custo computacional.

As desvantagens do Método dos Elementos de Contorno são:

1. Falta de programas comerciais abrangentes;
2. Problemas de não-linearidades das equações;
3. Implementação Computacional mais difícil;

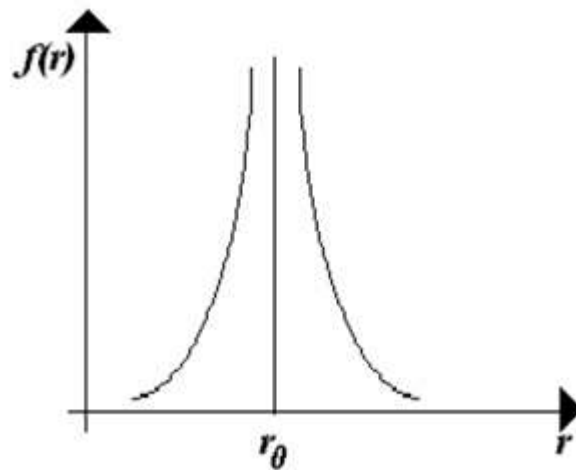


Figura 6. Funções potenciais.

4. Necessidade de cálculo de soluções fundamentais para cada caso.

Nesta linha de raciocínio, o objetivo deste trabalho é a implementação de um programa para análise de potencial de um sólido bidimensional utilizando o Método de Elementos de Contorno.

3. Metodologia e Desenvolvimento

Um algoritmo foi implementado em linguagem de programação Fortran, utilizando o *software Microsoft Power Station 4.0*, para resolução do seguinte problema: obtenção das incógnitas no contorno e os valores de \mathbf{u} e \mathbf{q} em qualquer ponto interno, para o problema potencial, onde se adotam nós duplos em cada ponto de descontinuidade.

Para isso, primeiramente, preparou-se o arquivo para entrada de dados do problema a partir do levantamento dos dados necessários para a solução do problema, que são os seguintes:

- Número de nós do contorno (NumeroNos), número de elementos (NumeroElementos), número de nós duplos, número de pontos internos (NoInterno) onde serão calculados PotencialU e FluxoQ;
- Leitura das coordenadas cartesianas (X, Y) de cada nó do contorno e cada ponto interno;
- Leitura dos nós inicial e final de cada elemento (os elementos foram declarados no sentido anti-horário);
- Leitura dos nós duplos;
- Leitura dos valores prescritos das variáveis (potencial u ou fluxo q) no contorno.

O código-fonte em si, desenvolvido em linguagem de programação Fortran, foi implementado seguindo a seguinte linha de pensamento: Primeiramente, fez-se uma descrição do programa e as variáveis utilizadas no decorrer do programa foram declaradas.

Em seguida, foi exibida a descrição do programa para o usuário, e também foi verificada a existência do arquivo de entrada de dados a partir do nome digitado pelo



usuário. Então, foi realizada a leitura do arquivo de entrada de dados e escolheu-se um nome para o arquivo de saída de dados.

Assim, os valores referentes ao número de nós, número de elementos, número de nós internos, quantidade de nós com potencial prescrito e de nós com valor prescrito, contidos no arquivo de entrada foram lidos e atribuídos às variáveis correspondentes no programa.

Posteriormente, calculou-se a quantidade total de nós somando-se o número de nós do contorno com o número de nós internos da malha. Também foi realizada a alocação dos vetores e matrizes utilizados no programa, os quais possuem como índices as variáveis declaradas anteriormente.

Desse modo, foi realizada a leitura dos nós do contorno e dos nós internos, e suas respectivas coordenadas x e y , dados apresentados no arquivo de entrada, e, consequentemente, estes mesmos dados foram impressos no arquivo de saída para visualização dos mesmos pelo usuário.

A seguir, foi realizada a leitura de cada elemento do contorno e seus respectivos nós inicial e final, armazenando-os em vetores, além de imprimi-los no arquivo de saída, idem ao passo anterior.

Dessa forma, efetuou-se o cálculo do comprimento dos elementos e dos seus respectivos senos e cossenos diretores. E os resultados foram impressos no arquivo de saída.

Então, foi realizada a leitura dos nós duplos da malha através do arquivo de entrada, e estes dados foram impressos no arquivo de saída. Também foi feita a leitura da quantidade de nós com potencial prescrito e da quantidade de nós com valores prescritos, e todas estas informações foram exibidas no arquivo de saída.

Nesta linha de pensamento, foi realizada a montagem das matrizes H e G . Para isso, primeiramente, as coordenadas de cada nó da malha foram inseridas na nova matriz que está sendo gerada, verificando se cada elemento (nó inicial ou nó final) pertence ao ponto de colocação. Além disso, o termo adimensional ε de deslocamento do nó para descontinuidade dos elementos em nó duplo foi adotado como 0,5, uma vez que é sugerido o uso entre 0,4 e 0,6.

Dessa forma, foi calculada a soma da contribuição de cada elemento nas matrizes H e G , quando a solução fundamental é aplicada no nó do contorno. Neste sentido, se o ponto de colocação não pertence ao elemento (nó inicial ou nó final), realiza-se a integração numérica. Para isso, chama-se a sub-rotina implementada para este fim específico, a qual é calculada a partir de oito pontos definidos, denominados intervalos de integração da quadratura de Gauss. Porém, se o ponto de colocação pertence ao elemento, realiza-se a integração analítica, também invocando a sub-rotina desenvolvida para esta finalidade.

Após estes procedimentos, as matrizes H e G são de fato criadas, a partir dos dados obtidos anteriormente.

Por conseguinte, efetuou-se o cálculo das incógnitas de contorno a partir da resolução do sistema de equações. Para tal, as colunas das matrizes H e G do sistema de equações foram reordenadas de acordo com as condições de contorno.

Então, foram efetuados os cálculos para os valores do potencial e do fluxo dos nós de contorno e internos da malha. A sub-rotina para cálculo do fluxo também utiliza os valores dos pontos de Gauss, a qual subdivide o fluxo em duas direções X e Y.

Em seguida, efetuou-se a verificação da matriz H para nós do contorno e nós internos. Para isso, é necessário analisar se em uma linha i da matriz H, a soma de todas as colunas deve ser nula. Se em todas as colunas, este resultado for positivo, significa que a matriz H foi calculada de forma correta. Caso contrário, é preciso rever os cálculos, pois algum procedimento pode estar sendo calculado de forma errada.

É importante salientar que, durante o desenvolvimento do algoritmo, foi adotado o método de aproximação linear.

Por fim, foram impressos no arquivo de saída as incógnitas do contorno, ou seja, para cada elemento, foi atribuído seu respectivo valor de potencial e de fluxo, após a execução de todos os cálculos mencionados anteriormente.

Na Figura 7, é exibido um fluxograma do algoritmo desenvolvido, o qual sintetiza as principais etapas de execução do programa implementado.

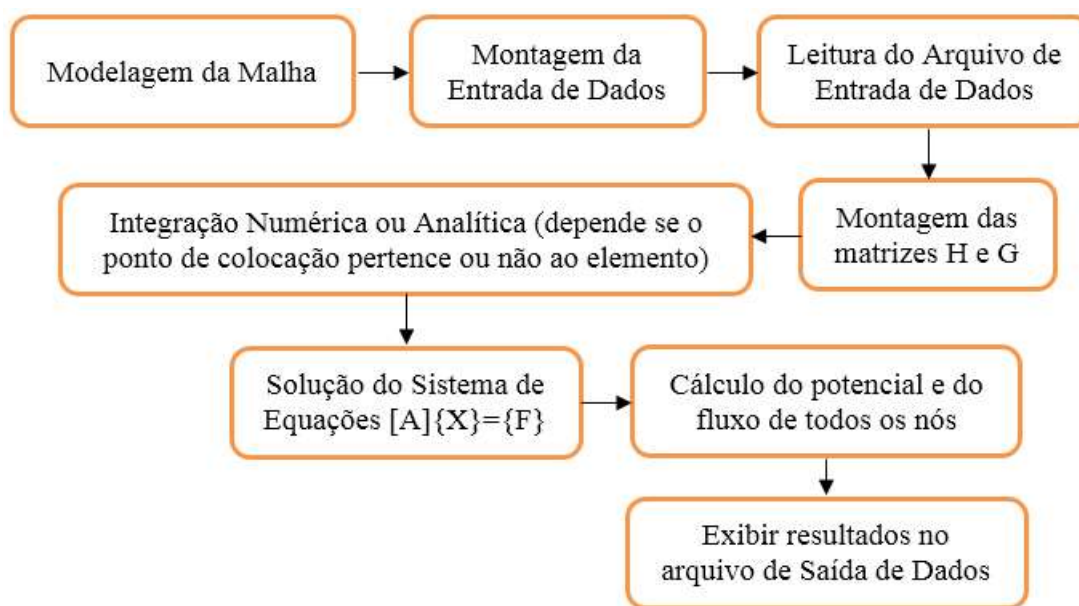


Figura 7. Fluxograma do algoritmo.

4. Resultados

4.1. Malha 1: Teste 1

Na Figura 8, pode ser visualizada a seguinte malha/sólido abaixo representando um teste de condução de calor, onde o contorno foi discretizado em treze nós e sete elementos, tendo sido adotado, portanto, aproximação linear para as variáveis. Têm-se ainda seis nós internos (H, I, J, K, L e M), onde se deseja conhecer os valores do potencial e do fluxo. Nos cantos foram definidos nós duplos. Nos nós 3, 4, 9 e 10, foram prescritos potenciais nulos e um potencial $u=200$ foi prescrito para os nós 1, 2, 11, 12 e 13. Nos nós 5, 6, 7 e 8 foi prescrito fluxo nulo.

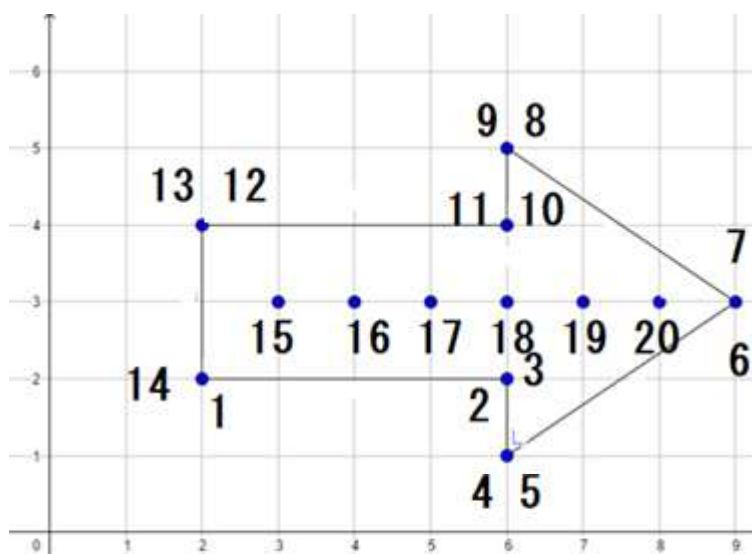


Figura 8. Malha 1 – Teste 1.

A partir desta malha, foi construída a entrada de dados no arquivo Bloco de Notas, nomeado “Malha1Entrada1.txt”, disponível no Apêndice A.

Posteriormente, o algoritmo implementado em linguagem de programação Fortran foi executado.

Desse modo, obteve-se o arquivo de saída, nomeado “Malha1Saida1.txt”, disponível no Apêndice B, o qual apresenta os seguintes resultados e informações referentes ao problema abordado.

4.2. Malha 1: Teste 2

Na Figura 9, pode ser visualizada a seguinte malha/sólido abaixo representando um teste de condução de calor, onde o contorno foi discretizado em 25 nós e 18 elementos, tendo sido adotado, portanto, aproximação linear para as variáveis. Têm-se ainda seis nós internos, onde se deseja conhecer os valores do potencial e do fluxo. Nos cantos foram definidos nós duplos. Nos nós 6, 7, 16 e 17, foram prescritos potenciais nulos e um potencial $u=200$ foi prescrito para os nós 1 a 5 e 18 a 25. Nos nós 8 a 15 foi prescrito fluxo nulo.

A partir desta malha, foi construída a entrada de dados no arquivo Bloco de Notas, nomeado “Malha1Entrada2.txt”, disponível no Apêndice C.

Posteriormente, o algoritmo implementado em linguagem de programação Fortran foi executado.

Desse modo, obteve-se o arquivo de saída, nomeado “Malha1Saida2.txt”, disponível no Apêndice D, o qual apresenta os seguintes resultados e informações referentes ao problema abordado.

A partir dos dados obtidos, observa-se os valores de fluxo nos nós 8 a 15 e os valores de potencial encontrados nos demais nós. Além disso, também se verifica o valor do potencial nos nós internos, e das respectivas direções X e Y de cada um desses nós internos da malha.

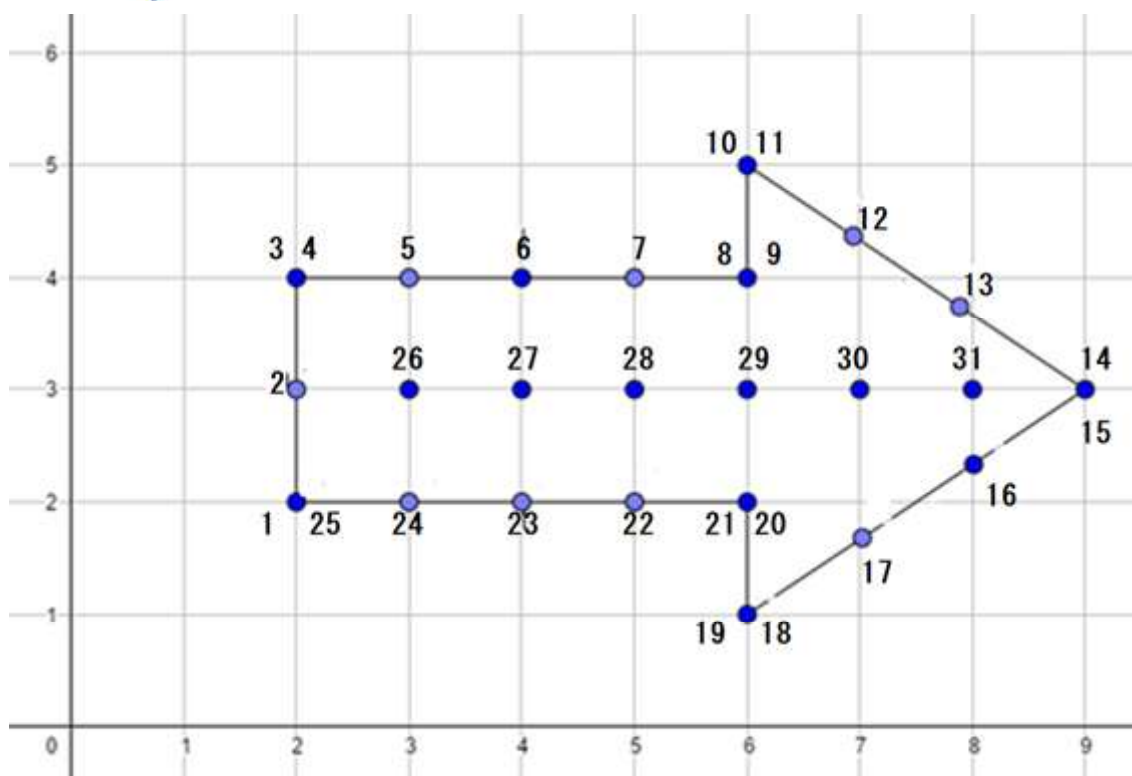


Figura 9. Malha 1 – Teste 2.

4.3. Malha 2: Teste 1

Na Figura 10, pode ser visualizada a seguinte malha/sólido representando um teste de condução de calor, onde o contorno foi discretizado em vinte nós e dez elementos, tendo sido adotado, portanto, aproximação linear para as variáveis. Têm-se ainda onze nós internos, onde se deseja conhecer os valores do potencial e do fluxo. Nos cantos foram definidos nós duplos. Nos nós 7 a 10 foram prescritos potenciais nulos e um potencial $u=100$ foi prescrito para os nós 1 a 6. Nos nós 11 a 20 foi prescrito fluxo nulo.

A partir desta malha, foi construída a entrada de dados no arquivo Bloco de Notas, nomeado “Malha2Entrada1.txt”, disponível no Apêndice E.

Posteriormente, o algoritmo implementado em linguagem de programação Fortran foi executado.

Desse modo, obteve-se o arquivo de saída, nomeado “Malha2Saida1.txt”, disponível no Apêndice F, o qual apresenta os resultados e informações referentes ao problema abordado.

Com os dados obtidos, observa-se os valores de potencial encontrados nos nós 1 a 10, e os valores de fluxo nos nós 11 a 20. Além disso, também se verifica o valor do potencial nos nós internos 21 a 31, e das respectivas direções X e Y de cada um desses nós internos da malha.

Portanto, ao comparar os dois testes realizados com a malha 1, verifica-se que houve convergência dos valores encontrados para o fluxo dos nós, encerrando a realização de exemplos/modelos com esta malha.

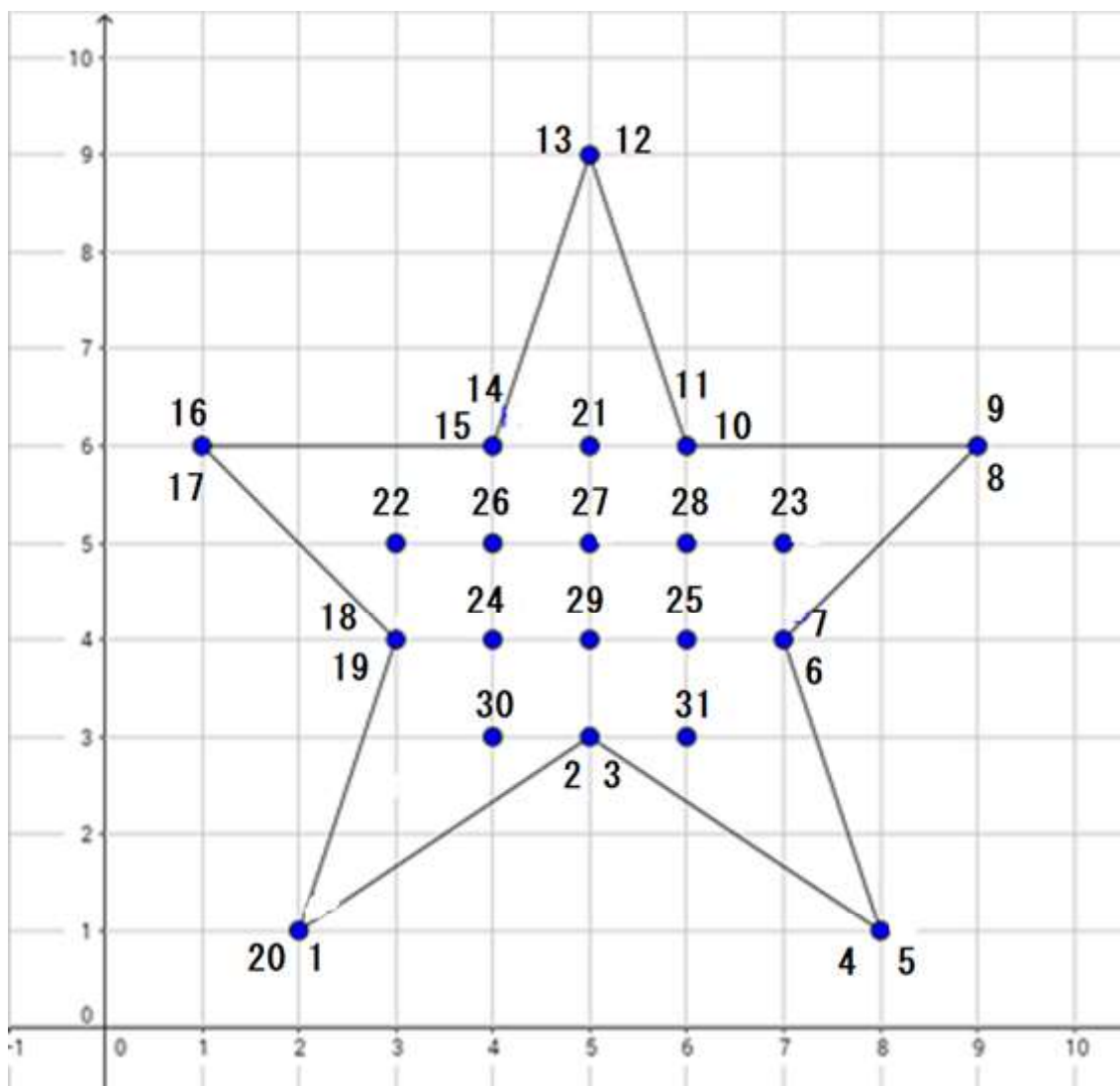


Figura 10. Malha 2 – Teste 1.

4.4. Malha 2: Teste 2

Na Figura 11, pode ser visualizada a seguinte malha/sólido representando um teste de condução de calor, onde o contorno foi discretizado em 40 nós e 30 elementos, tendo sido adotado, portanto, aproximação linear para as variáveis. Têm-se ainda onze nós internos, onde se deseja conhecer os valores do potencial e do fluxo. Nos cantos foram definidos nós duplos. Nos nós 7 a 20 foram prescritos potenciais nulos e um potencial $u=100$ foi prescrito para os nós 1 a 12. Nos nós 21 a 40 foi prescrito fluxo nulo.

A partir desta malha, foi construída a entrada de dados no arquivo Bloco de Notas, nomeado “Malha2Entrada2.txt”, disponível no Apêndice G.

Posteriormente, o algoritmo implementado em linguagem de programação Fortran foi executado.

Desse modo, obteve-se o arquivo de saída, nomeado “Malha2Saida2.txt”, disponível no Apêndice H, o qual apresenta os resultados e informações referentes ao problema abordado.

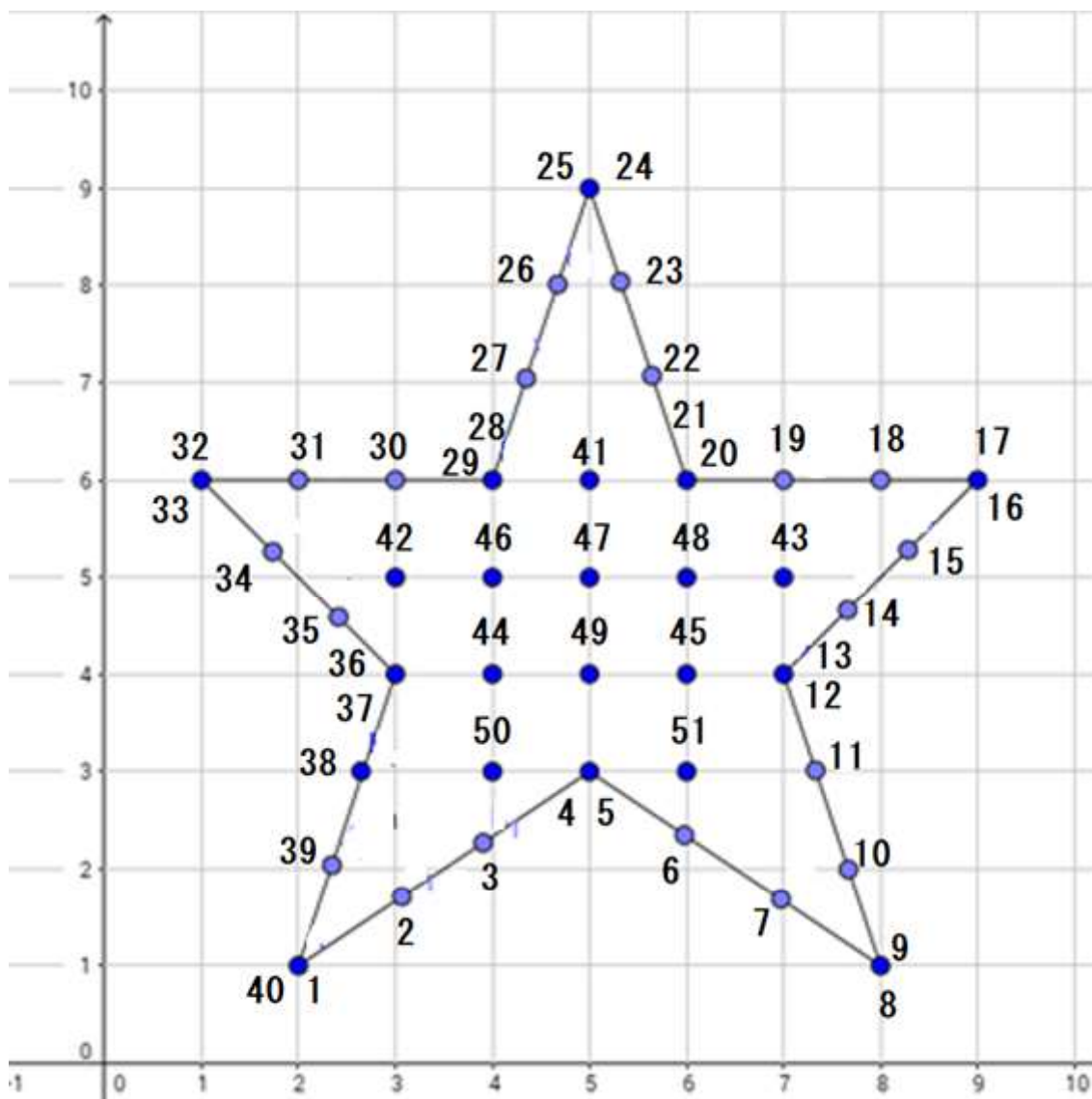


Figura 11. Malha 2 – Teste 2.

Com os dados obtidos, observa-se os valores de potencial encontrados nos nós 1 a 20, e os valores de fluxo nos nós 21 a 40. Além disso, também se verifica o valor do potencial nos nós internos 41 a 51, e das respectivas direções X e Y de cada um desses nós internos da malha.

Portanto, ao comparar os dois testes realizados com a malha 2, verifica-se que houve convergência dos valores encontrados para o fluxo dos nós, encerrando a realização de exemplos/modelos com esta malha.

Neste trabalho, abordou-se o problema de potencial de um sólido bidimensional utilizando integrais analíticas para o elemento constante, e semi-analíticas para os elementos constante, linear e quadrático. As integrais analíticas agilizam o processo de integração, incrementando a velocidade de processamento.

Além disso, observou-se que, tanto para a formulação clássica quanto para a formulação utilizada neste trabalho, quando se utilizam malhas pouco densas (pobres),



os resultados obtidos pelo Método de Elementos de Contorno apresentam grande dependência em relação à posição do ponto fonte.

Ainda percebeu-se que a estabilidade conseguida pela aplicação das técnicas de integração singular e quase singular, desenvolvidas neste trabalho, obviamente ocorre quando o fator densidade de discretização é atendido.

Assim, notou-se que os resultados e sua estabilidade dependem exclusivamente da densidade da malha e da qualidade de integração.

Então, conclui-se que o elemento quadrático apresenta taxa de convergência e nível de estabilidade superior ao elemento linear. E recomenda-se que, além do teste de convergência para uma progressão de malhas, a verificação da estabilidade dos resultados com relação à posição do ponto forte para se aceitar um resultado, supostamente correto, como verdadeiro.

Caso se escolha uma malha bastante densa, de acordo com a aproximação escolhida, basta verificar a invariabilidade dos resultados com relação à localização do ponto fonte.

Desse modo, recomenda-se ter cuidado ao se observar resultados científicos baseados no MEC, quando a densidade de malha for pobre. E, por fim, acredita-se que na literatura superestima-se a capacidade de aproximação do MEC quando se observam as densidades de malha aplicadas.

5. Conclusões

Neste caso do problema potencial, os valores de potencial e fluxo foram se aproximando da realidade à medida que houve maior discretização do objeto.

Portanto, em virtude do que foi apresentado, verifica-se que quanto mais discretizado o objeto, ou seja, quanto mais pontos de contorno forem incluídos na malha montada para cálculo de algum problema, maior será a sua precisão.

Por isso, o Método de Elementos de Contorno (MEC) é tão importante para a solução de problemas das mais diversas áreas, comprovando-se a partir dos exemplos realizados neste trabalho.

Referências

- Aliabadi, M. H. (2003). *Applications in solids and structures*. Queen Mary, University of London, UK.
- Alves, L. M. (2006). Apostila de método dos elementos de contorno. *Curitiba: Universidade Federal do Paraná - Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia*.
- Beer, G. and Watson, J. O. (1992). *Introduction to finite and boundary element methods for engineers*. New York: Wiley.
- Brebbia, C. A. (1980). *The boundary element method for engineers*. London, Pentech Press.
- Brebbia, C. A. and Dominguez, J. (1994). *Boundary elements: an introductory course*. Computational Mechanics Publication - Mc Graw-Hill Book Company.



- Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., and Wrobel, L. C. (2012). *Boundary element techniques: theory and applications in engineering*. Berlin: Springer-Verlag.
- Calderon, E. T. (1991). Uma formulação alternativa para o estudo de placas sobre fundação elástica pelo método dos elementos de contorno. *São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo*.
- Chaves, E. W. V. (1997). Análise de placas com variação de espessura através do método dos elementos de contorno. *São Carlos, Dissertação (Mestrado)-Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo*.
- Chueiri, L. H. M. (1994). Formulação do método dos elementos de contorno para análise elastoplástica de placas. *São Carlos. 219p. Tese (Doutorado), Universidade de São Paulo*.
- de Oliveira Neto, L. (1991). Análise de placas de borda curva pelo método dos elementos de contorno. *São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo*.
- de Paiva, J. B. (1987). Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas. *São Carlos. 195p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo*.
- Fernandes, G. R. (1998). O método dos elementos de contorno aplicado à análise não-linear de placas. *São Carlos. Dissertação (Mestrado)-Escola de Engenharia de São Carlos-Universidade de São Paulo*.
- Fernandes, G. R. (2003). Análise não linear de estruturas de pavimentos de edifícios através do método dos elementos de contorno. *São Carlos. 272p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo*.
- Fredholm, I. (1903). Sur une classe d'équations fonctionnelles. *Acta mathematica*, 27(1):365–390.
- Kupradze, V. D. (1965). *Potential methods in the theory of elasticity*. Israel program for scientific translations.
- Lachat, J.-C. (1975). A further development of the boundary integral technique for elastostatics. *Thesis (Ph.D.) - University of Southampton*.
- Love, A. E. H. (1944). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Dover, New York.
- Manzoli, O. L. (1992). Formulação do método dos elementos de contorno para placas sobre fundação elástica. *São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo*.
- Ribeiro, G. O. (1996). Sobre a formulação do método dos elementos de contorno de placas usando as hipóteses de reissner. *São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo*.
- Rizzo, F. J. (1967). An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quarterly of applied mathematics*, 25(1):83–95.



- Rodríguez, J. C. G. (1986). Sobre o emprego do método dos elementos de contorno em problemas elásticos bidimensionais. *São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.*
- Silva, N. A. (1988). Aplicação do método dos elementos de contorno à análise de placas sobre fundações elásticas. *São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.*
- Silva, N. A. (1996). Aplicação do método dos elementos de contorno à placas com enrijecedores utilizando a teoria de reissner. *São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.*
- Telles, J. and Brebbia, C. (1979). On the application of the boundary element method to plasticity. *Applied Mathematical Modelling*, 3(6):466–470.
- Venturini, W. S. (1982). Application of the boundary element formulation to solve geo-mechanical problems. *Thesis (Ph.D.) - University of Southampton.*
- Wrobel, L. C. (2003). *Applicaitons in Thermo Fluids and Acoustic*. Brunel University, UK.