



Trigonometria Triangular Esférica

Rodson Américo Santos¹, Joselito de Oliveira²

¹Colégio de Aplicação – Universidade Federal de Roraima (UFRR)
Boa Vista – RR – Brasil

²Departamento de Matemática – Universidade Federal de Roraima (UFRR)
Boa Vista – RR – Brasil

rodson.santos@ufrr.br, joselito.oliveira@ufrr.br

Abstract. *In this paper we study, in triangles constructed on a spherical surface, known versions of results of trigonometry in flat triangles. Initially, the concepts and fundamental elements of spherical geometry and trigonometry of spherical triangle are presented. We also see Girard's Theorem, where one can study the area of a triangle built on the surface of a sphere and the sum of its internal angles, which, unlike what occurs in flat triangles, is greater than one hundred and eighty degrees. After this, we present versions for the law of sines and law of cosines in a spherical triangle. Finally we present some applications, such as the calculation of the distance between two cities.*

Key words: *Spherical geometry. Girard's Theorem. Trigonometry in spherical triangles.*

Resumo. *Neste artigo estuda-se, em triângulos construídos sobre uma superfície esférica, versões de resultados conhecidos da trigonometria nos triângulos planos. Inicialmente, apresentam-se os conceitos e elementos fundamentais da Geometria Esférica e da trigonometria triangular esférica. Também é visto o Teorema de Girard, onde pode-se estudar a área de um triângulo construído sobre a superfície de uma esfera e a soma de seus ângulos internos, que ao contrário do que ocorre nos triângulos planos, é maior do que cento e oitenta graus. Feito isso, apresenta-se versões para a lei dos senos e lei dos cossenos em um triângulo esférico. Finalmente apresenta-se algumas aplicações, como o cálculo da distância entre duas cidades.*

Palavras-chaves: *Geometria esférica; Teorema de Girard; Trigonometria nos triângulos esféricos.*

1. Introdução

Em Geometria Plana, sabe-se que um triângulo possui seis elementos, três lados e três ângulos. E se conhecemos as medidas de três desses elementos, sendo pelo menos um deles um dos lados, podemos determinar todos os demais elementos do triângulo, bem como sua área. Para isso usa-se as relações conhecidas para triângulos no plano, como a lei dos senos e a lei dos cossenos (MUNIZ NETO, 2013). Mas se quisermos, por exemplo, conhecer as distâncias entre duas cidades separadas uma da outra por alguns milhares de



quilômetros, mesmo conhecendo suas coordenadas geográficas e utilizando outra cidade como referência para obter um triângulo, ainda assim não teríamos a mesma precisão que temos quando trabalhamos sobre o plano. A Terra tem a forma esférica, que deve ser considerada quando realizamos cálculos desse tipo, como veremos adiante. Nesse contexto a Geometria Euclidiana se torna obsoleta e passa a ser considerada a Geometria Esférica, que tem como ambiente a superfície esférica em substituição ao plano. Contudo, este trabalho se limitará ao estudo de alguns resultados da Trigonometria Triangular Esférica, como por exemplo a lei dos senos e a lei dos cossenos em triângulos esféricos. Tem-se como referências básicas Coutinho (2001), De Barros (2013), Todhunter (2006) e Zanella (2013). Mas é em Santos (2014), dissertação de mestrado profissional em Matemática-PROFMAT, que encontra-se a principal inspiração deste artigo.

2. A Geometria Esférica

O estudo das superfícies esféricas tem sido de interesse humano desde a antiguidade, como pode ser visto por meio do antigo tratado grego "Sobre a Esfera Móvel", de Autolycus de Pitane (BOYER, 2010). Este interesse continua latente, como atestam recentes trabalhos que abordam a geometria esférica. Alguns conceitos básicos dessa geometria são apresentados nesta seção, em especial os encontrados em Zanella (2013), De Barros (2013) e Coutinho (2001).

Definição 1 (Esfera). *Seja O um ponto no espaço e $r > 0$ um número real. Chama-se esfera de centro O e raio r o conjunto de todos os pontos P do espaço tais que a distância entre O e P é menor ou igual a r , isto é: $d(O, P) \leq r$.*

Definição 2 (Superfície Esférica). *A Superfície Esférica de centro O e raio r é o conjunto de todos os pontos P do espaço, tais que $d(O, P) = r$.*

Definição 3 (Corda). *Denomina-se por corda o segmento de reta determinado por dois pontos distintos da superfície esférica.*

Definição 4 (Diâmetro). *Chama-se diâmetro a corda que passa pelo centro da superfície esférica.*

Definição 5 (Pontos Antípodas). *Dados P e P' , pontos pertencentes a uma superfície esférica. O ponto P' é dito o antípoda de P se são pontos extremos de um diâmetro.*

Teorema 1. *A intersecção de uma superfície esférica com um plano passando pelo centro da esfera é uma circunferência de mesmo centro e mesmo raio que a superfície esférica.*

Demonstração. Seja S a superfície esférica de centro O e raio r , e seja Ω o plano que passa por O . Queremos mostrar que $S \cap \Omega = \{P \in \Omega \mid d(P, O) = r\}$.

1. Dado $P' \in S \cap \Omega$, então $P' \in S$ e $P' \in \Omega$. Como $P' \in S$, temos que $d(P', O) = r$ e portanto $P' \in \{P \in \Omega \mid d(P, O) = r\}$. Segue que $S \cap \Omega \subset \{P \in \Omega \mid d(P, O) = r\}$.
2. Dado $P' \in \{P \in \Omega \mid d(P, O) = r\}$, temos que $d(P', O) = r$. Logo P' pertence a S . E como $P' \in \Omega$ temos que $P' \in S \cap \Omega$. Segue que $\{P \in \Omega \mid d(P, O) = r\} \subset S \cap \Omega$.

Portanto, da dupla inclusão obtemos a igualdade $S \cap \Omega = \{P \in \Omega \mid d(P, O) = r\}$, que é a circunferência de centro O e raio r . \square



2.1. Circunferência máxima

Sobre uma superfície esférica S pode-se traçar circunferências com diferentes raios, mas algumas dessas circunferências desempenham papel importantíssimo na trigonometria esférica, são as chamadas circunferências máximas. As circunferências máximas são aquelas que têm o mesmo raio da superfície esférica. Na geometria esférica essas circunferências ocupam o lugar das retas na geometria euclidiana, e a própria superfície esférica ocupa o lugar do plano. Podemos dizer então que as circunferências máximas, construídas sobre essa superfície, são as retas na Geometria Esférica.

Definição 6 (Circunferência Máxima). *Seja S uma superfície esférica de centro O e raio r . Denomina-se circunferência máxima a circunferência em S de centro O e raio r .*

Definição 7 (Elementos Notáveis da Superfície Esférica).

- i) **Eixo:** *É qualquer reta que contém o centro O .*
- ii) **Polos:** *Chamamos de polos os pontos de intersecção do eixo com a superfície esférica.*
- iii) **Meridiano:** *É uma semicircunferência máxima cujo plano contém o eixo e liga os polos.*
- iv) **Equador:** *É uma circunferência máxima cujo plano é perpendicular ao eixo.*
- v) **Paralelo** *É uma circunferência cujo plano é perpendicular ao eixo. Ela é paralela ao equador.*

Surge naturalmente o seguinte questionamento: Qual o comportamento das circunferências máximas em relação ao quinto postulado de Euclides ou postulado das paralelas? Antes de responder a pergunta, vamos relembrar o quinto postulado de Euclides. Segundo Carmo (1987) a forma de equivalência do quinto postulado mais famosa é atribuída ao escocês John Playfair (que em 1795 publicou uma edição de *Os Elementos* de Euclides) e que se enuncia da maneira seguinte:

Postulado 1 (Quinto postulado de Euclides). *Dados uma reta r e um ponto A , fora de r , existe uma única reta s que passa por A e é paralela a r .*

Definição 8 (Hemisfério). *Uma circunferência máxima divide a superfície esférica S em duas regiões chamadas hemisférios, que são as chamadas superfícies semiesféricas.*

Proposição 1. *Seja C uma circunferência máxima. Dado um ponto P na superfície esférica, não pertencente a C , então toda circunferência máxima que passa por P intersecta C .*

Demonstração. Seja C uma circunferência máxima sobre a superfície esférica S . Pela definição (8), temos que C divide S em dois hemisférios H e H' .

Seja P um ponto qualquer pertencente a S , sem perda de generalidades podemos supor que o ponto P pertence ao hemisfério H . Agora, dada uma circunferência máxima C' , passando por P , então o seu antípoda P' encontra-se em H' , pois são extremos da corda que passa pelo centro da esfera (Figura 1).

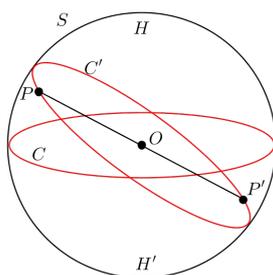


Figura 1. Intersecção de duas circunferências máximas

Fonte: SANTOS (2014, p.34)

Como P e P' pertencem a hemisférios distintos, divididos por C , então C' intersecta C . \square

A proposição (1) nos revela um ponto importante da geometria esférica. Sendo a circunferência máxima modelo para a reta e a superfície esférica um modelo para o plano, essa proposição garante a não validade do Postulado das Paralelas na geometria esférica, caracterizando-a como uma geometria não euclidiana, pois, dado um ponto arbitrário P sobre S , não pertencente a uma circunferência máxima C dada, qualquer circunferência máxima (reta) C' que passa por P , intersecta C . De maneira que, não existem retas paralelas na geometria esférica.

2.2. Distância entre dois pontos.

A forma de medir a distância entre dois pontos pode variar, dependendo do tipo de superfície em que eles se encontram. Mas em qualquer superfície e utilizando qualquer sistema de medida, a distância é dada pelo caminho mais curto para se chegar de um ponto a outro. Como podemos então medir a distância entre dois pontos que se encontram sobre uma superfície esférica? O resultado a seguir responde a essa pergunta. Sua demonstração encontra-se em Alves (2009), e está além dos objetivos da abordagem nesse trabalho, por isso é enunciado aqui como definição.

Definição 9 (Distância entre dois pontos). A distância $d(A,B)$ entre dois pontos A e B , pertencentes a uma superfície esférica S , é o comprimento do arco menor \widehat{AB} da circunferência máxima que passa por A e B .

Observação 1. Do ponto de vista da Geometria Diferencial, circunferências máximas são curvas do tipo geodésica, isto é, curvas que minimizam distâncias entre dois pontos. Elas fazem na esfera o que as retas fazem no plano. Um tratamento mais aprofundado pode ser encontrado em (CARMO, 2006).

Definição 10 (Quadrante). Um quadrante é um arco de circunferência máxima que mede exatamente $\frac{\pi}{2}$ radianos ou 90° graus.

Definição 11 (Polo de uma circunferência máxima). Seja C uma circunferência máxima sobre a superfície esférica S . Chamamos de **polo** da circunferência máxima C o ponto P sobre S tal que, a distância de P a qualquer ponto de C é igual a $\frac{\pi}{2}$.

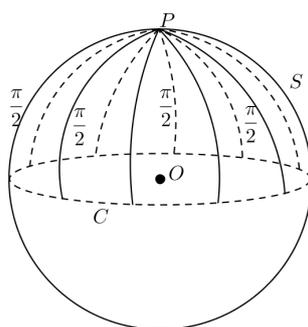


Figura 2. Polo de uma circunferência máxima

Fonte: SANTOS (2014, p.37)

Proposição 2. *Sejam A , C e P pontos sobre a superfície esférica tais que A e C não são antípodas um do outro. Se os arcos de circunferências máximas que ligam o ponto P aos pontos A e C forem, cada um deles igual a um quadrante, então P é um polo da circunferência máxima que passa por A e C .*

Demonstração. Seja O o centro da superfície esférica, como PA e PC são quadrantes os ângulos $P\hat{O}A$ e $P\hat{O}C$ são retos. Daí, o segmento PO é perpendicular ao plano AOC , e P é um polo da circunferência máxima que passa por A e C . \square

2.3. Ângulo sobre a superfície esférica

A definição de ângulo na geometria esférica está intrinsecamente ligada à definição de ângulo da geometria euclidiana. E como se vê ao longo desse trabalho, elementos da geometria euclidiana são sempre utilizados como suporte para a geometria esférica.

Definição 12 (Ângulo Esférico). *O ângulo esférico α , obtido pela intersecção de duas circunferências máximas (ou de dois arcos de circunferências máximas), é o menor ângulo formado entre as retas tangentes às circunferências máximas (ou aos arcos de circunferências máximas) num dos pontos de intersecção.*

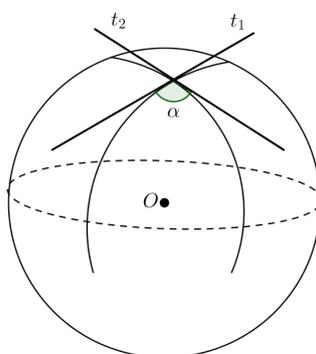


Figura 3. Ângulo entre dois arcos de circunferências máximas

Fonte: SANTOS (2014, p.38)

2.4. Fuso esférico

Com apenas dois arcos de circunferência máxima, consegue-se construir sobre S uma figura geométrica fechada. Na geometria plana, precisa-se de pelo menos três segmentos de retas para construir um polígono, que nesse caso é um triângulo. Na geometria esférica, com dois arcos obtém-se uma região chamada de fuso esférico ou biângulo esférico.

Definição 13 (Fuso esférico). Denomina-se de fuso esférico a região da superfície esférica compreendida entre dois meridianos.

Observação 2. Denominaremos de geradores os meridianos que determinam o fuso de uma superfície esférica.

Definição 14 (Vértices do Fuso Esférico). Denomina-se de vértices do fuso esférico, aos pontos de intersecção dos meridianos geradores.

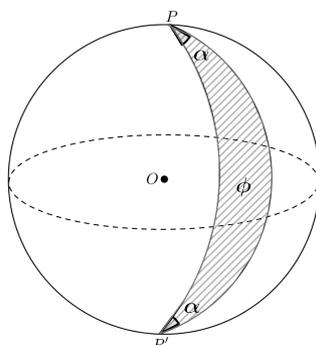


Figura 4. Fuso esférico ϕ de vértices P e P'

Fonte: LIMA (1984, p. 6), adaptado.

Definição 15 (Ângulo do Fuso Esférico). O ângulo do fuso é o ângulo entre os dois meridianos geradores.

Proposição 3 (Área do fuso esférico). A área de um fuso de ângulo α radianos, sobre uma superfície esférica de raio r , é igual a $2\alpha r^2$.

Demonstração. Seja A_f a área do fuso esférico. Essa área está para a área da superfície esférica $4\pi r^2$, assim como o ângulo do fuso α radianos está para 2π . Portanto, $A_f = 2\alpha r^2$. \square

Exemplo 1. Um fuso de ângulo $\frac{\pi}{2}$ ocupa $\frac{1}{4}$ da superfície esférica, de maneira que sua área será de πr^2 , que é igual a área de um círculo de raio r .

Definição 16 (Fuso completo). Dado um fuso ϕ na superfície esférica, o conjunto formado por todos os antípodas dos pontos de ϕ é também um fuso ϕ' , chamado de fuso antípoda de ϕ . A reunião $\Phi = \phi \cup \phi'$ chama-se um fuso completo.

Proposição 4. Seja ϕ o fuso construído sobre uma superfície esférica de raio r e ϕ' o fuso antípoda de ϕ . Então, a área do fuso completo $\Phi = \phi \cup \phi'$ é igual a $4\alpha r^2$, onde α é o ângulo do fuso esférico.

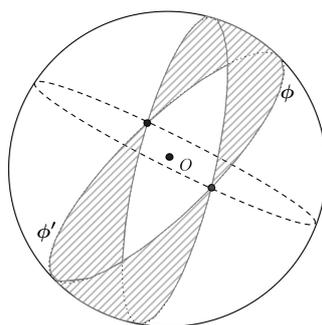


Figura 5. Fuso Completo

Fonte: LIMA (1984, p. 6), adaptado.

Demonstração. Note que α é o ângulo oposto pelo vértice das tangentes aos meridianos geradores do fuso ϕ , concluímos a partir daí que ele é também o ângulo do fuso ϕ' , formado por todos os pontos antípodas de ϕ . Segue que ϕ' tem a mesma área que ϕ , que pela proposição 3 é igual a $2\alpha r^2$. Portanto, a área do fuso completo é $4\alpha r^2$. \square

Teorema 2. *Seja Φ um fuso completo, cujo ângulo mede α radianos. Qualquer plano que passe pelo centro da superfície esférica S , a decompõe em dois hemisférios H e H' . As partes R e R' do fuso completo Φ contidas em cada um desses hemisférios têm a mesma área $2\alpha r^2$.*

Demonstração. Consideremos a função $f : S \rightarrow S$, que transforma cada ponto $x \in S$ em seu antípoda $f(x) = x'$. Esta função tem as seguintes propriedades:

- 1^a Se x é um ponto do hemisfério H , seu antípoda $x' = f(x)$ pertence ao hemisfério oposto H' ;
- 2^a Se x é um ponto do fuso completo Φ , seu antípoda $x' = f(x)$ ainda pertence a Φ ;
- 3^a Dada qualquer região R da superfície esférica, a região antípoda $R' = f(R)$, formada pelos pontos antípodas dos pontos de R , tem a mesma área que R .

Logo, se chamarmos de R a parte do fuso completo Φ situada no hemisfério H , veremos que sua região antípoda R' é a parte de Φ situada no hemisfério H' e que a área de $\Phi = (\text{área de } R) + (\text{área de } R') = 2(\text{área de } R)$. Portanto, pela proposição 4 concluímos que a área de R é igual a $2\alpha r^2$. \square

2.5. Triângulos esféricos e o teorema de Girard

Os triângulos esféricos são o principal objeto desse estudo, pois os dois teoremas principais abordados aqui tratam das relações trigonométricas nesses triângulos. Pode-se calcular a área desses triângulos, bem como estudar as relações entre seus lados e ângulos.

Definição 17 (Triângulo Esférico). *Sejam A, B e C três pontos distintos sobre um mesmo hemisfério da superfície esférica S , e não pertencentes a mesma circunferência máxima. A figura formada pelos arcos de circunferências máximas, que unem esses pontos dois a dois, chama-se triângulo esférico.*

Os lados \widehat{BC} , \widehat{AC} e \widehat{AB} do triângulo esférico são denotados por a , b e c , respectivamente, e correspondem a medida, em graus (ou radianos), dos ângulos subtendidos por eles no centro da superfície esférica. Os ângulos do triângulo ABC são os ângulos esféricos \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} (Figura 6).

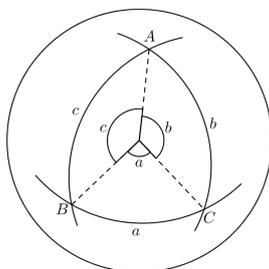


Figura 6. Triângulo Esférico

Fonte: COUTINHO (2001, p.84)

Agora vamos ao teorema de Girard, que permite obter, além da área, uma série de informações sobre os triângulos esféricos.

Teorema 3 (Teorema de Girard). *Se α , β e γ são os ângulos internos de um triângulo esférico, medidos em radianos, então $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{r^2}$, onde A é a área do triângulo e r é o raio da superfície esférica que o contém.*

Demonstração. Seja H um hemisfério que contenha o triângulo esférico gerado pelas intersecções das circunferências máximas C_1 , C_2 e C_3 (Figura 7).

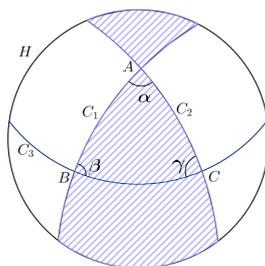


Figura 7. Vista superior da superfície esférica contendo o triângulo esférico ABC

Fonte: LIMA (1984, p. 6)

Prolongando nos dois sentidos os lados que formam o ângulo α até encontrarem o bordo do hemisfério H , obtém-se uma região R_α , cuja área mede $2\alpha r^2$ de acordo com o teorema (2).

Procedendo da mesma maneira com os lados que formam os ângulos β e γ obtém-se as regiões R_β e R_γ , cujas áreas são $2\beta r^2$ e $2\gamma r^2$, respectivamente. Observe que a reunião das regiões R_α , R_β e R_γ formam o hemisfério H , porém com a área do triângulo



dado sendo contada três vezes, ou seja, duas vezes mais do que o necessário. E sendo A é a área do triângulo esférico, obtemos

$$\begin{aligned} \text{Área}(R_\alpha) + \text{Área}(R_\beta) + \text{Área}(R_\gamma) - 2A &= \text{Área}(H) \\ 2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2 &= 2\pi r^2 + 2A \\ \alpha + \beta + \gamma &= \pi + \frac{A}{r^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

□

Observa-se da igualdade (1) que, quanto menor for a área do triângulo em relação à superfície esférica que o contém, mais próximo de π será a soma dos seus ângulos internos, pois $\lim_{A \rightarrow 0} \frac{A}{r^2} = 0$.

Corolário 1. *A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior do que π e menor do que 3π .*

Demonstração. Sendo A a área do triângulo esférico, temos que $A > 0$. Considerando esse fato e a igualdade (1), concluímos que $\alpha + \beta + \gamma > \pi$. Agora, todo ângulo interno de um triângulo esférico é menor que π , então $\alpha + \beta + \gamma < \pi + \pi + \pi = 3\pi$. □

Este resultado contradiz o que ocorre nos triângulos construídos sobre uma superfície plana, onde a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a π .

Corolário 2 (Área de um triângulo esférico). *A área de um triângulo esférico é dada por:*

$$A = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2,$$

onde α , β e γ são os ângulos entre os lados do triângulo e r é o raio da superfície esférica que o contém.

Demonstração. Esse fato é consequência imediata da igualdade (1). □

Ao contrário do que ocorre na geometria euclidiana plana onde triângulos semelhantes podem ter áreas distintas, este corolário garante que, se ABC e DEF são triângulos quaisquer sobre S e se os ângulos de ABC forem iguais aos ângulos de DEF , então esses dois triângulos têm áreas iguais.

3. A Trigonometria nos Triângulos Esféricos

Nesta seção são apresentadas e demonstradas a lei dos cossenos e a lei dos senos para triângulos esféricos, que são os teoremas principais desse trabalho. Esses dois teoremas, associados ao Teorema de Girard, permitem a obtenção de muitas informações sobre um triângulo esférico.

3.1. Razões trigonométricas nos triângulos esféricos

Nos triângulos esféricos pode-se falar em seno e cosseno de seus ângulos internos e também de seus lados. Mas como se obtém essas e outras razões trigonométricas nesses triângulos?

Como foi visto na definição de ângulo esférico (Definição 12), os ângulos internos de um triângulo esférico são obtidos a partir dos ângulos planos formados pelas tangentes tiradas do ponto de intersecção dos arcos que formam cada ângulo. Assim, os valores do seno, cosseno, tangente e demais razões para os ângulos internos de um triângulo esférico, são as mesmas dos ângulos planos formados pelas retas tangentes ao ponto de intersecção de seus lados.

De forma semelhante, as medidas dos lados \widehat{AB} , \widehat{AC} e \widehat{BC} de um triângulo esférico ABC são dadas em graus ou radianos (Definição 17). Assim, as razões trigonométricas para esses lados, que são arcos, serão as mesmas do arco correspondente no ciclo trigonométrico.

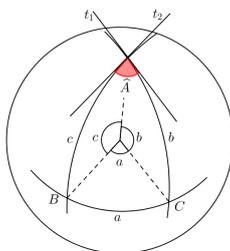


Figura 8. Razões trigonométricas no triângulo esférico

Fonte: SANTOS (2014, p.45)

3.2. Lei dos cossenos nos triângulos esféricos

A lei dos cossenos nos triângulos esféricos é o principal resultado abordado nesse trabalho. Ele permite obter outros resultados da geometria esférica, como a lei dos senos, que será vista adiante. A partir desse teorema também será obtida uma fórmula que facilitará o cálculo da distância entre dois pontos quaisquer da superfície da Terra, desde que sejam conhecidas suas coordenadas geográficas.

Antes de apresentar a lei dos cossenos esféricos, para fins de comparação, enuncie-se aqui a lei dos cossenos para triângulos planos.

Teorema 4 (Lei dos Cossenos). *Em qualquer triângulo de lados a , b e c , o quadrado de um dos lados é igual a soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o duplo produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles, isto é, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$, onde α é o ângulo formado pelos lados de comprimentos b e c .*

Teorema 5 (Lei dos Cossenos nos Triângulos Esféricos). *Em qualquer triângulo esférico de lados a , b e c , e ângulos opostos \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} , respectivamente, o cosseno de um de seus lados é igual ao produto dos cossenos dos outros dois lados, mais o produto dos senos dos referidos lados pelo cosseno do ângulo formado por eles, ou seja,*

$$\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(\widehat{A}).$$

Demonstração. Seja S a superfície esférica de centro O e raio r , que contém o triângulo ABC , de lados a , b e c , medidos respectivamente pelos ângulos planos: \widehat{BOC} , \widehat{AOC} e \widehat{AOB} . Sejam t_1 e t_2 tangentes às circunferências máximas AB e AC , no ponto A . O prolongamento dos raios OB e OC encontram as tangentes t_1 e t_2 nos pontos M e N , respectivamente. Assim, os segmentos AO e AM e, AO e AN são, respectivamente perpendiculares (Figura 9).

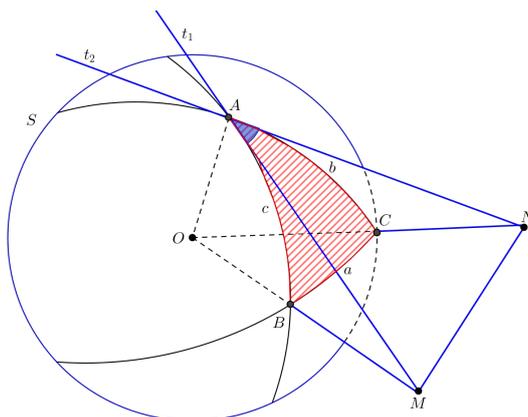


Figura 9. Triângulo ABC sobre S

Fonte: ZANELLA (2013, p. 93), adaptado.

Observe que os pontos A , O , M e N formam os vértices de um poliedro de faces triangulares.

Planificando esse poliedro obtemos os seguintes triângulos planos:

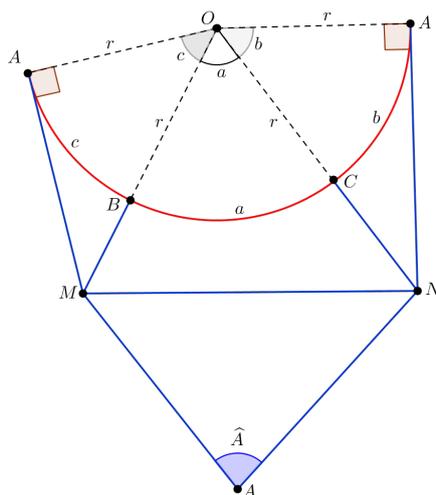


Figura 10. Planificação do poliedro $AMNO$

Fonte: ZANELLA (2013, p. 94), adaptado.

Na Figura (10), os triângulos OAM e OAN são retângulos em A . Daí:



$$\cos(b) = \frac{AO}{NO}, \quad \sin(b) = \frac{AN}{NO}, \quad \cos(c) = \frac{AO}{MO}, \quad \sin(c) = \frac{AM}{MO}. \quad (2)$$

Além disso:

$$NO^2 = AO^2 + AN^2 \quad (3)$$

$$MO^2 = AO^2 + AM^2. \quad (4)$$

Somando (3) e (4) membro a membro:

$$\begin{aligned} MO^2 + NO^2 &= 2AO^2 + AM^2 + AN^2 \\ 2AO^2 &= (MO^2 - AM^2) + (NO^2 - AN^2). \end{aligned} \quad (5)$$

Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos planos MNO e MNA :

$$MN^2 = MO^2 + NO^2 - 2MO \cdot NO \cos(a) \quad (6)$$

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cos(\widehat{A}). \quad (7)$$

Subtraindo-se (7) de (6), obtemos:

$$2MO \cdot NO \cos(a) = (MO^2 - AM^2) + (NO^2 - AN^2) + 2AM \cdot AN \cos(\widehat{A}). \quad (8)$$

Substituindo (5) em (8), temos:

$$2MO \cdot NO \cos(a) = 2AO^2 + 2AM \cdot AN \cos(\widehat{A}). \quad (9)$$

Dividindo a equação (9) por $(2NO \cdot MO)$, obtemos:

$$\cos(a) = \frac{AO}{NO} \cdot \frac{AO}{MO} + \frac{AN}{NO} \cdot \frac{AM}{MO} \cos(\widehat{A}). \quad (10)$$

E substituindo as equações (2) na equação (10), obtemos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(\widehat{A}). \quad (11)$$

Com construções análogas a essa, porém traçando as tangentes t_1 e t_2 pelos vértices B e C , respectivamente, mostramos que:

$$\cos(b) = \cos(a) \cos(c) + \sin(a) \sin(c) \cos(\widehat{B}) \quad (12)$$

$$\cos(c) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \cos(\widehat{C}). \quad (13)$$

Porém, na construção anterior, tivemos que assumir que os lados que formam o ângulo \widehat{A} são ambos menores que um quadrante (veja definição 2.9), pois assumimos que as tangentes ao ponto A encontram os prolongamentos dos raios OB e OC . Devemos agora mostrar que a fórmula obtida também é válida se esses lados não forem ambos menores que um quadrante. Para isso, vamos analisar os seguintes casos: apenas um dos

lados é maior que um quadrante, os dois lados são maiores que um quadrante, um dos lados é igual a um quadrante e o outro menor, um dos lados é igual a um quadrante e o outro é maior, e finalmente o caso em que os dois lados são quadrantes.

Caso I. Suponhamos que apenas um dos lados que formam o ângulo \hat{A} seja maior que um quadrante, por exemplo AB . Tracemos o prolongamento dos lados AB e BC até o ponto B' , antípoda de B . Assim teremos $AB' = c'$, $AC = b$ e $CB' = a'$ (Figura 11).

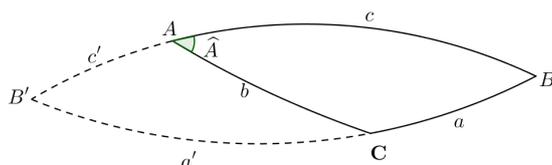


Figura 11. Caso em que apenas um dos lados de \hat{A} é maior que um quadrante

Fonte: SANTOS (2014, p.50)

A partir do que já foi provado, no triângulo $AB'C'$, temos que $\cos(a') = \cos(b) \cos(c') + \sin(b) \sin(c') \cos(\hat{A}')$.

Mas, $a' = \pi - a$, $c' = \pi - c$ e $(\hat{A}') = \pi - \hat{A}$. Assim, $\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(\hat{A})$.

Caso II. Suponhamos que ambos os lados que formam o ângulo \hat{A} sejam, cada um deles, superior a um quadrante. Façamos então o prolongamento dos lados AB e AC até o ponto A' , antípoda de A . Assim, teremos o triângulo $A'BC$, com $A'B = c'$ e $A'C = b'$, figura (12).

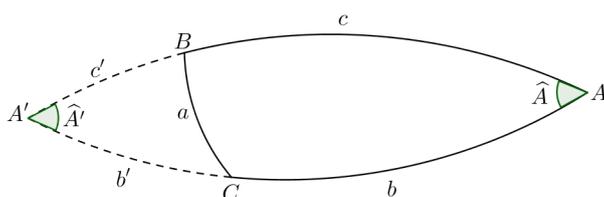


Figura 12. Caso em que os dois lados de \hat{A} são maiores que um quadrante

Fonte: SANTOS (2014, p.50)

E como antes $\cos(a) = \cos(b') \cos(c') + \sin(b') \sin(c') \cos(\hat{A}')$. Mas $b' = \pi - b$, $c' = \pi - c$ e $\hat{A}' = \hat{A}$. Assim $\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(\hat{A})$.

Caso III. Suponhamos que um dos lados do ângulo \hat{A} é um quadrante, por exemplo AB , e o outro maior, figura (13) à esquerda, ou menor, figura (13) à direita. Tomemos D de maneira que AD seja um quadrante.

Se BD for um quadrante, então B é um polo da circunferência máxima que passa por AC (proposição 2), e neste caso: $a = c = \hat{A} = \frac{\pi}{2}$, e a fórmula se verifica.

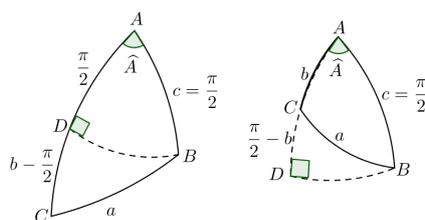


Figura 13. Casos em que um dos lados é um quadrante

Fonte: SANTOS (2014, p.51)

Por outro lado, se BD não for um quadrante, o triângulo BCD nos dá:

$$\cos(a) = \cos(\widehat{CD}) \cos(\widehat{BD}) + \sin(\widehat{CD}) \sin \widehat{BD} \cos(\widehat{CDB})$$

$\cos(\widehat{CDB}) = 0$ e $\cos(\widehat{CD}) = \cos(\frac{\pi}{2} - b) = \cos(b - \frac{\pi}{2}) = \sin(b)$ e $\cos(\widehat{BD}) = \cos(\widehat{A})$.
O que resulta em

$$\cos(a) = \sin(b) \cos(\widehat{A}).$$

É a essa identidade que se reduz à fórmula (11), quando $c = \frac{\pi}{2}$.

Caso IV. Suponhamos que ambos os lados que formam o ângulo \widehat{A} sejam quadrantes. A fórmula (11) torna-se: $\cos(a) = \cos(\widehat{A})$. E isso é obviamente verdadeiro, pois assim, A é polo da circunferência máxima que passa por BC , o que garante que $\widehat{A} = a$. \square

3.3. Lei dos senos nos triângulos esféricos

A partir da lei dos cossenos para triângulos esféricos, obtem-se o equivalente esférico para a lei dos senos, resultado conhecido da geometria euclidiana. Também para fins de comparação, enuncia-se aqui a lei dos senos para triângulos planos.

Teorema 6 (Lei dos Senos). *Em qualquer triângulo ABC de lados a, b e c , a razão entre cada lado e o seno do ângulo oposto é igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita, isto é,*

$$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})} = 2R, \quad (14)$$

onde R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

Teorema 7 (Lei dos Senos nos Triângulos Esféricos). *Em qualquer triângulo esférico ABC , de lados a, b e c , a razão entre o senos de qualquer um dos lados e o seno do seu ângulo oposto tem o mesmo valor numérico.*

$$\frac{\sin(a)}{\sin(\widehat{A})} = \frac{\sin(b)}{\sin(\widehat{B})} = \frac{\sin(c)}{\sin(\widehat{C})}.$$



Demonstração. Esse resultado é consequência da Lei dos cossenos nos triângulos esféricos, demonstrada anteriormente. Da fórmula (11), temos que:

$$\cos(\widehat{A}) = \frac{\cos(a) - \cos(b) \cos(c)}{\sin(b) \sin(c)}.$$

E através da identidade trigonométrica fundamental obtemos:

$$\sin(\widehat{A}) = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2(a) - \cos^2(b) - \cos^2(c) + 2 \cos(a) \cos(b) \cos(c)}}{\sin(b) \sin(c)}.$$

O radical à direita deve ser tomado com sinal positivo, pois $\sin(b)$, $\sin(c)$ e $\sin(\widehat{A})$, são todos positivos, já que pela definição de triângulo esférico $0 < b, c, \widehat{A} < \pi$. Assim:

$$\sin(\widehat{A}) = \frac{\sqrt{1 - \cos^2(a) - \cos^2(b) - \cos^2(c) + 2 \cos(a) \cos(b) \cos(c)}}{\sin(b) \sin(c)} \quad (15)$$

De modo análogo, obtemos:

$$\sin(\widehat{B}) = \frac{\sqrt{1 - \cos^2(a) - \cos^2(b) - \cos^2(c) + 2 \cos(a) \cos(b) \cos(c)}}{\sin(a) \sin(c)} \quad (16)$$

$$\sin(\widehat{C}) = \frac{\sqrt{1 - \cos^2(a) - \cos^2(b) - \cos^2(c) + 2 \cos(a) \cos(b) \cos(c)}}{\sin(a) \sin(b)} \quad (17)$$

Dividindo $\sin(\widehat{A})$ por $\sin(\widehat{B})$, conforme as igualdades (15) e (16), obtemos:

$$\frac{\sin(a)}{\sin(\widehat{A})} = \frac{\sin(b)}{\sin(\widehat{B})}. \quad (18)$$

Analogamente, fazendo $\frac{\sin(\widehat{A})}{\sin(\widehat{C})}$, conforme as igualdades (15) e (17)), obtemos:

$$\frac{\sin(a)}{\sin(\widehat{A})} = \frac{\sin(c)}{\sin(\widehat{C})}. \quad (19)$$

E de (18) e (19), concluímos que $\frac{\sin(a)}{\sin(\widehat{A})} = \frac{\sin(b)}{\sin(\widehat{B})} = \frac{\sin(c)}{\sin(\widehat{C})}$. \square

Observa-se através do Limite Trigonométrico Fundamental, $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin(a)}{a} = 1$, cuja demonstração pode ser encontrada em Stewart (2007, v.1, p.212), que se o valor de a



tornar-se muito próximo de zero, o valor de $\text{sen}(a)$ torna-se cada vez mais próximo de a . Deste modo temos que: $\text{sen}(a) \cong a$, $\text{sen}(b) \cong b$ e $\text{sen}(c) \cong c$.

Então a igualdade $\frac{\text{sen}a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\hat{C})}$ torna-se próxima de:

$$\frac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{b}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{c}{\text{sen}(\hat{C})},$$

que é a lei dos senos para triângulos planos.

Observa-se ainda, através da série de Maclaurin, que a representação de $\cos(x)$ até o termo de ordem dois é dada por:

$$\cos(x) \cong 1 - \frac{x^2}{2}. \quad (20)$$

A demonstração deste fato pode ser encontrada em Stewart (2007, v.2, p.764).

De forma semelhante ao que ocorre com a lei dos senos para triângulos esféricos, se em um triângulo seus lados a , b e c têm comprimentos próximos de zero, pelo teorema (5), pela igualdade (20), e pelo limite trigonométrico fundamental, temos:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{a^2}{2} &= \left(1 - \frac{b^2}{2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2}\right) + bc \cos(\hat{A}) \\ a^2 &= -\frac{b^2c^2}{2} + c^2 + b^2 - 2bc \cos(\hat{A}). \end{aligned} \quad (21)$$

Como se está tomando valores de a , b e c muito próximos de zero, temos que em (21), a parcela $-\frac{b^2c^2}{2}$ tem um valor desprezível, o que torna a igualdade muito próxima de $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$ (lei dos cossenos para triângulos planos).

4. Aplicações

Na antiga Grécia, Aristóteles chegou à conclusão de que a Terra era necessariamente esférica. Já o português Fernão de Magalhães, realizou a primeira viagem de circunavegação do mundo, em 1519, comprovando o formato esférico da Terra. E finalmente, em 12 de abril de 1961 o cosmonauta soviético Yuri Gagarin, tornou-se o primeiro ser humano a ver a esfericidade da Terra a partir do espaço.

Nesta seção, apresentam-se algumas aplicações da lei dos cossenos esféricos, lei dos senos esféricos e do Teorema de Girard, para o cálculo de áreas e de distâncias sobre a superfície da Terra.

Exemplo 2. *Sabendo-se que, aproximadamente, Macapá fica 51° à oeste de Greenwich e Londres fica 51.5° ao norte do Equador, e que a latitude de Macapá e a longitude de Londres são tão próximas de 0° que podem ser consideradas nulas. E, além disso, que a intersecção do Meridiano de Greenwich com o Equador forma um ângulo de 90° . Calcule a área do triângulo sobre a superfície da Terra que tem os vértices em Macapá, em Londres e na intersecção do Meridiano de Greenwich com a linha do Equador.*

Solução:

Tomemos a intersecção do Meridiano de Greenwich com o Equador como sendo o ponto A e as cidades de Macapá e Londres como os pontos B e C , respectivamente. Então, temos o triângulo esférico ABC , do qual conhecemos os lados $b = 51,5^\circ$ e $c = 51^\circ$ e o ângulo entre eles, $\hat{A} = 90^\circ$. Pela Lei dos cossenos para triângulos esféricos temos que:

$$\begin{aligned}\cos(a) &= \cos(51,5^\circ) \cos(51^\circ) + \sin(51,5^\circ) \sin(51^\circ) \cos(90^\circ) \\ \cos(a) &= 0,620,63 + 0,780,77 \cdot 0 \\ a &= 66,5^\circ.\end{aligned}$$

O que se quer obter aqui é a área do triângulo dado na figura (14).

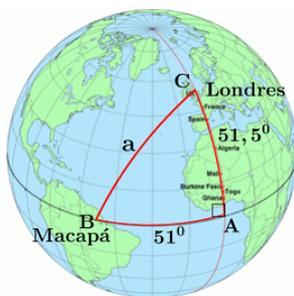


Figura 14. Área de triângulo esférico

Fonte:Arteblog¹

Observe que já se tem as medidas dos lados: $a = 66,5^\circ$, $b = 51,5^\circ$ e $c = 51^\circ$. Tem-se também a medida do ângulo $\hat{A} = 90^\circ$. Agora, precisamos usar a lei dos senos nos triângulos esféricos (Teorema: 7) para obter os valores de \hat{B} e \hat{C} , em graus. Assim, pelo teorema (7), temos:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(66,5^\circ)}{\sin(90^\circ)} &= \frac{\sin(51,5^\circ)}{\sin(\hat{B})} \\ \frac{0,92}{1} &= \frac{0,78}{\sin(\hat{B})} \\ \sin(\hat{B}) &= 0,85.\end{aligned}$$

Portanto concluímos que $\hat{B} = 58^\circ$ e de forma análoga obtemos $\hat{C} = 56^\circ$. Transformando os valores $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 58^\circ$ e $\hat{C} = 56^\circ$, para radianos, obtemos respectivamente: $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{29\pi}{90}$ e $\gamma = \frac{14\pi}{45}$. E sendo o raio da Terra igual a 6370 km , pelo corolário (2) do Teorema de Girard temos que

¹Disponível em: <http://pre-vestibular.arteblog.com.br/47304/HORARIO-DE-VERAO-desde-o-inicio/>. Acesso em 29/03/2014.

$$\begin{aligned}
 A &= (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2 \\
 &= \left(\frac{\pi}{2} + \frac{29\pi}{90} + \frac{14\pi}{45} - \pi\right) \cdot (6370)^2 \\
 &= 16\,996\,310 \text{ km}^2.
 \end{aligned}$$

Portanto, a área do triângulo ABC da figura (14) é de $16\,996\,310 \text{ km}^2$.

Se temos a latitude e a longitude de um determinado local, dizemos que temos as coordenadas geográficas do mesmo. Conhecendo-se as coordenadas geográficas de duas cidades e aplicando-se alguns teoremas, podemos calcular a distância entre elas, como veremos a seguir.

Exemplo 3. *Distância entre as cidades de Caracas e Casablanca.*

Lembramos que a cidade de Caracas é capital da Venezuela, enquanto que a cidade de Casablanca é a capital do Marrocos, no norte da África. Elas possuem as seguintes coordenadas geográficas presentes na tabela (1):

Tabela 1. Coordenadas geográficas de Caracas e Casablanca

Cidade	Latitude	Longitude
Caracas	$10^\circ 29' 16'' \cong 10,5^\circ$	$-66^\circ 52' 45'' \cong -66,9^\circ$
Casablanca	$33^\circ 35' 17'' \cong 33,6^\circ$	$-7^\circ 36' 40'' \cong -7,6^\circ$

Fonte: SANTOS (2014, p. 64)

Qual a distância entre essas duas cidades?

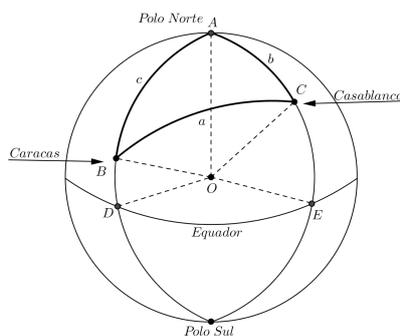


Figura 15. Distância entre Caracas e Casablanca

Fonte: SANTOS (2014, p.64)

Solução: Consideremos o globo terrestre como a superfície esférica S da figura (15). Sejam os pontos B a cidade de Caracas, C a cidade de Casablanca e A o polo norte da Terra. Com isso temos o triângulo ABC , e conhecendo as latitudes e longitudes dos pontos B e C , podemos determinar os valores do ângulo \widehat{A} e dos lados b e c .

Como o arco \widehat{AD} tem 90° e o arco \widehat{BD} tem $10,5^\circ$, que é a latitude de Caracas, temos que $c = 90^\circ - 10,5^\circ = 79,5^\circ$. De forma análoga temos que $b = 56,4^\circ$. Como A fica no Polo Norte, o plano que tangencia a Terra em A é paralelo ao plano do Equador,

com isso o ângulo \widehat{A} está associado ao arco \widehat{DE} . Para determinar esse arco basta calcular a diferença entre as longitudes das duas cidades. Isto é: $\widehat{A} = -7,6^\circ - (-66,9^\circ) = 66,9^\circ - 7,6^\circ = 59,3^\circ$. De posse desses valores, usamos a lei dos cossenos nos triângulos esféricos (5), para calcular o lado a .

$$\cos(a) = \cos(56,4^\circ) \cos(79,5^\circ) + \sin(56,4^\circ) \sin(79,5^\circ) \cdot \cos(59,3^\circ)$$

$$\cos(a) = 0,55 \cdot 0,18 + 0,83 \cdot 0,98 \cdot 0,51$$

$$\cos(a) = 0,51$$

$$a = 59,3^\circ.$$

Precisamos agora transformar essa medida a dada em graus, para a distância D , em quilômetros. Sendo D a distância entre Caracas e Casablanca, e 6370 km o raio da Terra, temos que $\frac{D}{2\pi r} = \frac{59,3}{360}$.

Portanto $D = \frac{2\pi(6370) \cdot 59,3}{360} = 6592,6 \text{ km}$, que é a distância aproximada entre Caracas e Casablanca.

Observação 3. Para obter o ângulo \widehat{A} , poderíamos ter calculado a diferença entre as longitudes das duas cidades no sentido contrário do que fizemos, isto é, a longitude de Caracas menos a longitude de Casablanca: $\widehat{A} = -66,9^\circ - (-7,6^\circ) = -66,9^\circ + 7,6^\circ = -59,3^\circ$, pois $\cos(59,3^\circ) = \cos(-59,3^\circ) = 0,51$, já que o cosseno é uma função par.

4.1. Fórmula para o cálculo da distância entre cidades

A partir da lei dos cossenos para triângulos esféricos, pode-se deduzir uma fórmula que permite calcular a distância entre dois pontos B e C quaisquer da superfície da Terra, conhecendo apenas suas coordenadas geográficas, sem a necessidade de executar as subtrações do exemplo (3). Consideremos que o vértice A do triângulo ABC coincida sempre com o Polo Norte da Terra.

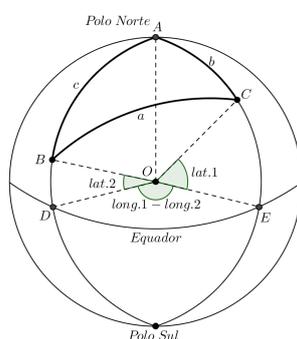


Figura 16. Distância entre dois pontos quaisquer

Fonte: ZANELLA (2013, p. 97)

Na figura (16), tem-se que a latitude do ponto B é dada por $lat2$ e a latitude do ponto C é dada por $lat1$. E a medida do ângulo \widehat{A} é dada pela diferença entre as longitudes dos pontos C e B , nessa ordem, ou seja, a longitude de C é $long1$ e a longitude de B é



$long2$. Substituindo esses valores na fórmula da lei dos cossenos para triângulos esféricos, temos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(\hat{A}). \quad (22)$$

Mas pelas identidades do seno e do cosseno, da diferença, temos:

$$\cos(b) = \cos(90^\circ - lat1) = \sin(lat1) \quad (23)$$

$$\sin(b) = \sin(90^\circ - lat1) = \cos(lat1) \quad (24)$$

$$\cos(c) = \cos(90^\circ - lat2) = \sin(lat2) \quad (25)$$

$$\sin(c) = \sin(90^\circ - lat2) = \cos(lat2). \quad (26)$$

E temos ainda que:

$$\hat{A} = (long1 - long2) \quad (27)$$

Substituindo (23),(24),(25),(26) e (27) na equação (22), temos:

$$\cos(a) = \sin(lat1) \sin(lat2) + \cos(lat1) \cos(lat2) \cos(long1 - long2).$$

Então

$$a = \cos^{-1}\{\sin(lat1) \sin(lat2) + \cos(lat1) \cos(lat2) \cos(long1 - long2)\} \quad (28)$$

Portanto, a distância D entre dois pontos quaisquer, A e B , da superfície da Terra, dadas suas coordenadas geográficas, é dada por:

$$D(A, B) = \frac{2\pi r a}{360}, \quad (29)$$

onde a é dada pela fórmula (28) e r é o raio da terra.

Exemplo 4. Qual a distância entre a cidade de Boa Vista, capital de Roraima e a Cidade do Cabo, na África do Sul?

Solução: As coordenadas geográficas destas cidades são dadas na tabela (2).

Tabela 2. Coordenadas geográficas de Boa Vista e Cidade do Cabo

Cidade	Latitude	Longitude
Boa Vista (A)	$2^\circ 49' 12'' \cong 2,8^\circ (lat.2)$	$-60^\circ 40' 23'' \cong -60,7^\circ (long.2)$
Cidade do Cabo (B)	$-33^\circ 55' 33'' \cong -34^\circ (lat.1)$	$18^\circ 23' 23'' \cong 18,4^\circ (long.1)$

Fonte: SANTOS (2014, p.67)



Figura 17. Distância entre Boa Vista e Cidade do Cabo

Fonte: Vale do Jequitinhonha²

Vamos utilizar a fórmula (28) para calcular a distância entre essas duas cidades.

$$\cos(a) = \sin(\text{lat1}) \sin(\text{lat2}) + \cos(\text{lat1}) \cos(\text{lat2}) \cos(\text{long1} - \text{long2})$$

Substituindo os valores da tabela na equação acima, temos:

$$\begin{aligned}\cos(a) &= \sin(-34^\circ) \sin(2,8^\circ) + \cos(-34^\circ) \cos(2,8^\circ) \cos(18,4^\circ - (-60,7^\circ)) \\ \cos(a) &= (-0,56) \cdot 0,04 + 0,83 \cdot 0,99 \cdot 0,18 \\ \cos(a) &= 0,125 \\ a &= 82,8^\circ.\end{aligned}\tag{30}$$

Fazendo a conversão de a para a distância D em quilômetros através da fórmula (29), temos

$$D(A, B) = \frac{2\pi(6370) \cdot 82,8}{360} = 9205,2 \text{ km},$$

que é a distância aproximada entre Boa Vista e a Cidade do Cabo.

Observe que em <http://codigopostal.ciberforma.pt/ferramentas/coordenadas.asp> pode-se obter as coordenadas geográficas de qualquer ponto da superfície da Terra e www.entrecidadesdistancia.com.br nos possibilita calcular a distância entre várias cidades da Terra, bastando para isso escrever o nome das duas cidades entre as quais se quer saber a distância.

5. Considerações Finais

Os principais conceitos e alguns resultados da Geometria Esférica, foram apresentados nesse trabalho utilizando quase que unicamente os recursos da matemática elementar. Essa abordagem permitirá a utilização desse trabalho por professores de matemática do ensino médio, podendo ser utilizado também como auxílio no desenvolvimento de projetos com abordagens interdisciplinares nas escolas, como por exemplo, em Geografia.

²Disponível em: <http://blogdobanu.blogspot.com.br/2010/03/terra-planeta-agua.html>. Acesso em 29/03/2014.



Além das aplicações diretas dessa geometria, algumas delas apresentadas aqui, vale ressaltar a não validade do Quinto Postulado de Euclides, tornando-a uma geometria não euclidiana. Ressalta-se também que, a abordagem da referida geometria limitou-se aqui ao estudo de triângulos esféricos e algumas relações trigonométricas, destacando-se a lei dos cossenos e a lei dos senos. Assim, pode-se estudar outras figuras geométricas sobre a superfície esférica, diferentes dos fusos e triângulos. Por fim, esperamos que este artigo contribua com o aperfeiçoamento do professor e com a melhoria no ensino da matemática.

Referências

- [1] ALVES, Sérgio. A geometria do globo terrestre. In: **Revista de Iniciação Científica OBMEP**, Rio de Janeiro: IMPA 2009.
- [2] BOYER, Carl B. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 3ª edição. São Paulo: Blucher, 2010.
- [3] CARMO, Manfredo Perdigão do. Geometrias Não-Euclidianas. In: **Revista Matemática Universitária**, nº 6, Rio de Janeiro, 1987.
- [4] CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. Rio de Janeiro, 1987.
- [5] COUTINHO, Lázaro. **Convite às geometrias não-euclidianas**. Interciência: Rio de Janeiro, 2001.
- [6] DE BARROS, A.A; ANDRADE, P.F. **Introdução à geometria projetiva**. Sociedade Brasileira de Matemática-SBM: Rio de Janeiro, 2013.
- [7] LIMA, Elon Lages. **Ainda sobre o teorema de Euler para poliedros convexos**. In: RPM nº5. IMPA: Rio de Janeiro, 1984.
- [8] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria**. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática-SBM: Rio de Janeiro, 2013.
- [9] SANTOS, Rodson Américo. **Elementos da trigonometria triangular esférica**. 2014. p. 73. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Roraima, Boa Vista, 2014.
- [10] STEWART, James. **Cálculo**, v.1 e 2; Tradução: Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins. São Paulo: Thomson Learning, 2007.
- [11] TODHUNTER, I. **Spherical Trigonometry for the use of colleges and schools**. Project Gutenberg. London: Macmillan and Co, 2006.
- [12] ZANELLA, Idelmar André. **Geometria esférica: uma proposta de atividades com aplicações**. 2013. p. 129. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.