



Volume de sólidos de revolução com eixo de rotação inclinado

Rufino, E. O.¹; Soares, Stephen B.²

¹Departamento de Matemática - Universidade Federal de Roraima

elzimar.rufino@ufrr.br

²Departamento de Matemática - Universidade Federal de Roraima

stephen.soares@ufrr.br

Abstract. *The reader will find in Calculus books differential and integral how calculate the volume of a solid generated by the rotation of a limited region by the graph of a function $y = f(x)$, for the lines $x = a, x = b$ e by the axis x around the axis x , or the y axis. Our purpose in this paper is to show an more general, where the solid of revolution is generated by the rotation of a region bounded by a curve $y = f(x)$, around a line $y = cx + d$, non-parallel to the x axis. In addition, we present an alternative to plot the solid of revolution in the K3D SURF software, unless translation and rotation of the solid.*

Resumo. *O leitor encontrará em livros de Cálculo diferencial e integral como calcular o volume de um sólido gerado pela rotação de uma região limitada pelo gráfico de uma função $y = f(x)$, pelas retas $x = a, x = b$ e pelo eixo x em torno do eixo x , ou do eixo y . Nosso propósito aqui é mostrar uma situação mais geral, onde o sólido de revolução é gerado pela rotação de uma região limitada por uma curva $y = f(x)$, em torno de uma reta $y = cx + d$, não-paralela ao eixo x . Além disso, apresentamos uma alternativa para plotar o sólido de revolução no software K3D SURF, a menos de translação e rotação do sólido.*

1. Introdução

O cálculo diferencial e integral é uma ferramenta de grande utilidade em muitas situações matemáticas. Entre essas situações encontra-se o cálculo de áreas e volumes.

Dentre os métodos para o cálculo de volumes encontra-se o método dos invólucros cilíndricos. Tal situação ocorre quando se deseja calcular o volume do sólido gerado pela rotação de uma curva em torno do eixo x , do eixo y ou de algum eixo paralelo a um desses eixos. O volume do sólido S em questão é calculado tomando-se o limite de uma soma de Riemann, onde cada parcela é o volume de um cilindro. De modo equivalente, através da teoria de integrais, mais especificamente, através de uma integral definida. No entanto, acreditamos que não existe na literatura uma fórmula que calcula o volume de um sólido obtido pela rotação de uma curva em torno de um eixo que não seja paralelo a um dos eixos coordenados. O propósito deste trabalho é fornecer um estudo inicial que explora o cálculo do volume de um sólido obtido pela rotação de uma curva em torno de um eixo não paralelo ao eixo x , por exemplo. A Figura 1 a seguir, (veja [5]), fornece uma boa idéia do que estamos falando.



Figure 1. Caminhão betoneira

Para finalizar, apresentamos uma alternativa de parametrização para o sólido a menos de uma translação e uma rotação, isto é, o formato do sólido permanece inalterado, mudando apenas sua posição em relação aos eixos coordenados. Com essa modificação, pode-se utilizar um software gráfico para plotar o sólido, rotacionado em torno do eixo x , por exemplo.

2. Preliminares

Apresentaremos nesta seção algumas informações que serão úteis para um melhor entendimento do nosso trabalho.

2.1. Distância entre ponto e reta

Dados um ponto P e uma reta r em um plano, a distância de P à r é definida por

$$d(P, r) = \min\{d(P, Q); Q \in r\}. \quad (1)$$

O seguinte teorema, que enunciaremos sem demonstração, nos fornece uma maneira explícita de calcularmos a distância definida em (1).

Teorema 1 *Sejam r a reta de equação $ax + by = d$ e $P = (x_o, y_o)$ um ponto no plano. A distância entre P e r é dada por*

$$d(P, r) = \frac{|ax_o + by_o - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (2)$$

onde $|\cdot|$ é a função módulo.

Veja [3] para mais detalhes.

2.2. Projeção ortogonal de um ponto em uma reta

Sejam $P = (x, y)$ e r , um ponto e uma reta de um plano, respectivamente. Para obtermos o ponto P' que é a projeção ortogonal do ponto P sobre a reta r , podemos utilizar a seguinte fórmula

$$P' = Proj_r P = \frac{\langle P, u \rangle}{\|u\|^2} u \quad (3)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual do \mathbb{R}^2 , $\|\cdot\|$ é a norma proveniente desse produto interno, isto é, $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ e u é um vetor que aponta na direção da reta r . Veja [3] para mais detalhes.

2.3. Volume de um tronco de cone

É conhecido em geometria espacial que o volume de um tronco de cone de altura h , raio da base maior R e raio da base menor r , é dado pela fórmula

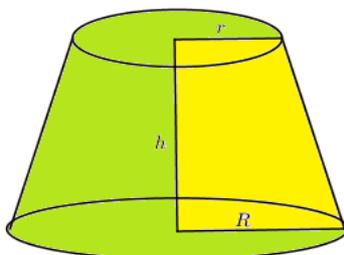


Figure 2. Tronco de cone

$$V = \frac{\pi h}{3} [R^2 + Rr + r^2] \quad (4)$$

Veja [6] para mais detalhes.

2.4. Rotações no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3

A ação de rotacionar um ponto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, θ radianos em torno da origem e no sentido horário é realizada pela transformação linear $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja matriz na base canônica é dada por

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Algebricamente R_θ é dada por

$$R_\theta(x, y) = (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta). \quad (6)$$

Se $\theta = \frac{\pi}{2}$ então

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

ou seja,

$$R_{\frac{\pi}{2}}(x, y) = (y, -x).$$

Por exemplo,

$$R_{\frac{\pi}{2}}(0, 1) = (1, 0) \quad (8)$$

isto é, o ponto $(1, 0)$ é o efeito de uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos no ponto $(0, 1)$, no sentido horário.

Ação de rotacionar de um ponto $P = (x, y, z)$ do \mathbb{R}^3 , v radianos em torno do eixo x no sentido anti-horário, é realizada pela transformação linear $T_u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é dada por

$$T_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos u & -\sin u \\ 0 & \sin u & \cos u \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Na forma algébrica, T_u é dada por

$$T_u(x, y, z) = (x, y \cos u - z \sin u, y \sin u + z \cos u). \quad (10)$$

Para mais detalhes veja [7].

3. A situação mais simples

A situação mais simples que encontramos nos livros didáticos é aquela onde um sólido S é obtido rotacionando-se uma região delimitada pelo eixo x , por $x = a$, $x = b$ e pelo gráfico de uma função contínua f definida no intervalo $[a, b]$, em torno do eixo x . A Figura 3 ilustra o caso em que f é definida por $f(x) = x^2$ no intervalo $[0, 2]$.

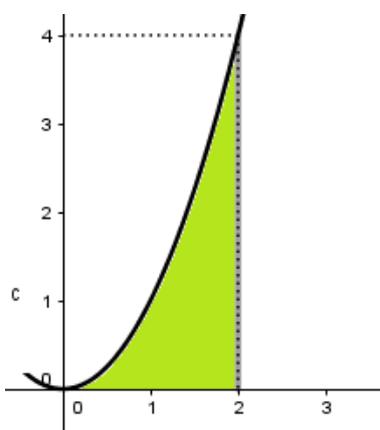


Figure 3. Região determinada pelo gráfico de $f(x) = x^2$.

Para calcular o volume do sólido S temos à disposição (veja por exemplo [4]) a fórmula

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx. \quad (11)$$

No nosso caso específico, $V = \pi \int_0^2 [x^2]^2 dx = \frac{32\pi}{5}$. A Figura 4 representa o sólido S , mencionado neste exemplo.

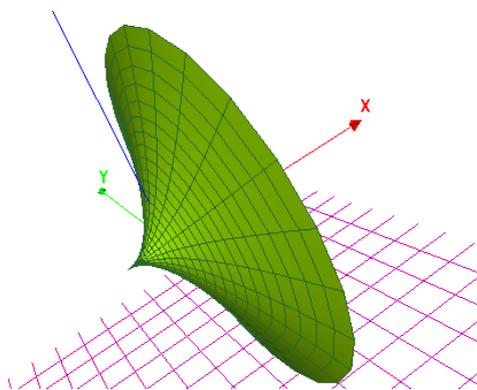


Figure 4. Representação do Sólido S

4. Rotação com eixo inclinado

A situação que vamos apresentar aqui generaliza a exposta na seção anterior. Sejam f uma função contínua definida no intervalo $[a, b]$ e r a reta de equação $y = cx + d$. Sem perda de generalidade, vamos considerar $f(x) \geq cx + d$, para todo $x \in [a, b]$. Dados $x = a$ e $x = b$, sejam t e t' as retas que passam pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, respectivamente, e que são perpendiculares à reta r . Desejamos calcular o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pela reta $y = cx + d$, pelo gráfico da função f e pelas retas t e t' , em torno do eixo x . A região é descrita na Figura 5.

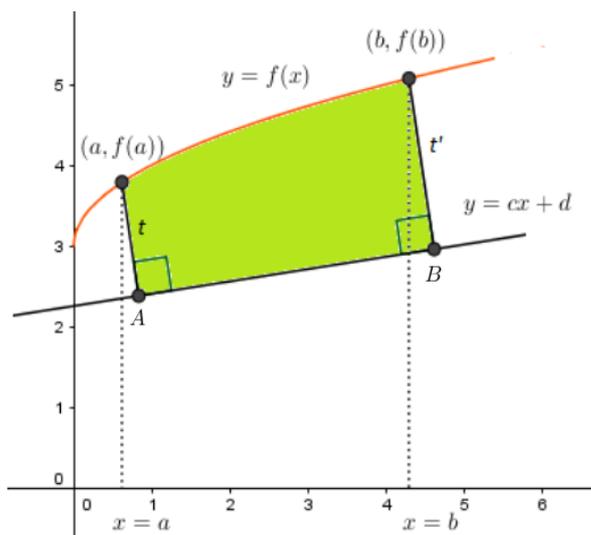


Figure 5. Região limitada por f e $y = cx + d$

Seja Δ uma partição do intervalo $[a, b]$ dada por $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$ e ξ_i um elemento no i -ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ dessa partição. A partição Δ determina, no segmento $AB \subset r$, uma partição Δ' do seguinte modo: Para cada j considere M_j a projeção ortogonal do ponto $(x_j, f(x_j))$ sobre a reta r . A partição Δ' fica determinada pelos pontos $A = M_0, M_1, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_{n-1}$ e $M_n = B_n$, ou de modo equivalente, pelos segmentos $M_0M_1, M_1M_2, \dots, M_{i-1}M_i, \dots, M_{n-1}M_n$. Denote por $\Delta_i u = \overline{M_{i-1}M_i}$ o comprimento do i -ésimo segmento da partição Δ' e considere o retângulo de altura h_i e comprimento $\Delta_i u$, onde h_i é a distância do ponto $R = (\xi_i, f(\xi_i))$ até a reta r . Se esse retângulo gira em torno da reta r , um invólucro cilíndrico será obtido, como mostra a Figura 6.

Se $\Delta_i V$ for a medida do volume desse invólucro cilíndrico, então

$$\Delta_i V = \pi h_i^2 \Delta_i u. \quad (12)$$

Utilizando a fórmula (2), da distância entre ponto e reta, obtemos

$$h_i^2 = [d(R, r)]^2 = \frac{(c\xi_i - f(\xi_i) + d)^2}{c^2 + 1}. \quad (13)$$

Combinando as equações (12) e (13) resulta que

$$\Delta_i V = \pi \frac{(c\xi_i - f(\xi_i) + d)^2}{c^2 + 1} \Delta_i u. \quad (14)$$

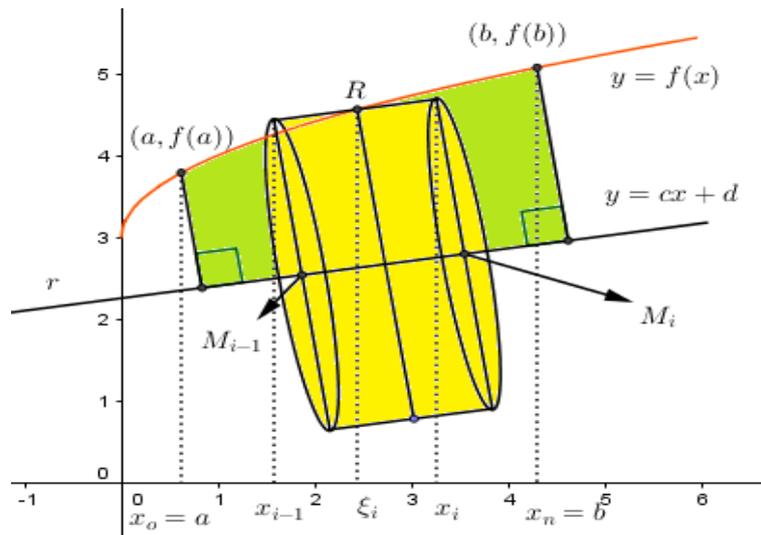


Figure 6. Representação de um invólucro cilíndrico

Nosso próximo passo será expressar $\Delta_i u$ em termos de $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$. Para tal, considere as retas p e q , perpendiculares à reta r que passa pelos pontos $P = (x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $Q = (x_i, f(x_i))$, respectivamente. Note que $M_{i-1} = p \cap r$ e $M_i = q \cap r$. As equações dessas retas são:

$$p : y - f(x_{i-1}) = -\frac{1}{c}(x - x_{i-1})$$

e

$$q : y - f(x_i) = -\frac{1}{c}(x - x_i).$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{c}(x - x_i) + f(x_i) \\ y &= cx + d \end{aligned}$$

determinamos o ponto

$$M_i = \left(\frac{cf(x_i) + x_i - cd}{c^2 + 1}, \frac{c^2 f(x_i) + cx_i + d}{c^2 + 1} \right).$$

De modo análogo, obtemos o ponto

$$M_{i-1} = \left(\frac{cf(x_{i-1}) + x_{i-1} - cd}{c^2 + 1}, \frac{c^2 f(x_{i-1}) + cx_{i-1} + d}{c^2 + 1} \right).$$

Como $\Delta_i u = d(M_i, M_{i-1})$, segue da fórmula da distância entre dois pontos que

$$\Delta_i u = \sqrt{\left(\frac{c(f(x_i) - f(x_{i-1})) + x_i - x_{i-1}}{c^2 + 1} \right)^2 + \left(\frac{c^2(f(x_i) - f(x_{i-1})) + c(x_i - x_{i-1})}{c^2 + 1} \right)^2}.$$

Denotando $f(x_i) - f(x_{i-1}) = \Delta_i y$, resulta que

$$\Delta_i u = \frac{1}{\sqrt{c^2 + 1}} |c\Delta_i y + \Delta_i x|. \quad (15)$$

Colocando em evidência $\Delta_i x$ na equação (15) obtemos

$$\Delta_i u = \frac{1}{\sqrt{c^2 + 1}} \left| 1 + c \frac{\Delta_i y}{\Delta_i x} \right| \Delta_i x. \quad (16)$$

Combinando a equação (14) com a equação (16) obtemos

$$\Delta_i V = \pi \frac{(c\xi_i - f(\xi_i) + d)^2}{c^2 + 1} \frac{1}{\sqrt{c^2 + 1}} \left| 1 + c \frac{\Delta_i y}{\Delta_i x} \right| \Delta_i x. \quad (17)$$

A partição Δ' determina n retângulos, que girados em torno da reta r determinam n invólucros cilíndricos. Somando o volume desses n invólucros cilíndricos, segue de (17) que

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i V = \sum_{i=1}^n \pi \frac{(c\xi_i - f(\xi_i) + d)^2}{\sqrt{(c^2 + 1)^3}} \left| 1 + c \frac{\Delta_i y}{\Delta_i x} \right| \Delta_i x, \quad (18)$$

que é uma soma de Riemann que deverá aproximar o volume do sólido S , descrito na Figura 7.

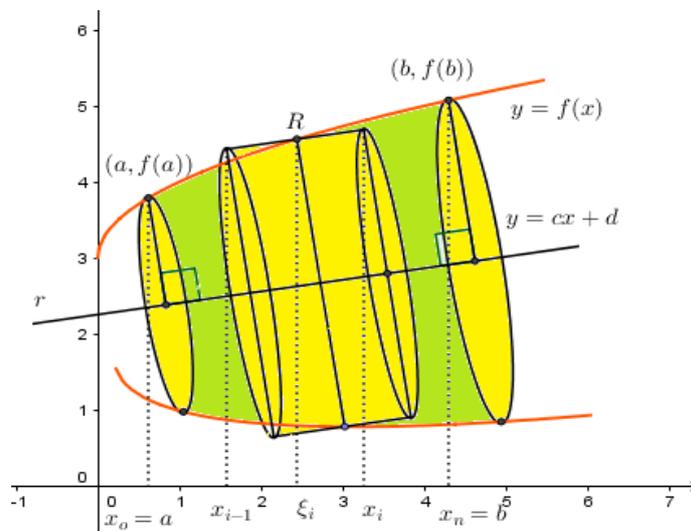


Figure 7. Representação do sólido S

Neste momento, além da continuidade da função f , necessitamos que a função f seja diferenciável e tenha derivada contínua. Quando a norma da partição tende a zero, o limite da soma dada em (18) existe pois a função dada pela expressão

$$\pi \frac{(cx - f(x) + d)^2}{\sqrt{(c^2 + 1)^3}} |1 + cf'(x)|,$$

é contínua em $[a, b]$, visto que f e f' são contínuas em $[a, b]$. Assim, se V for o volume do sólido S , então

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta_i V.$$

Segue da teoria de integração que

$$V = \frac{\pi}{\sqrt{(c^2 + 1)^3}} \int_a^b (cx + d - f(x))^2 |1 + cf'(x)| dx.$$

Podemos então, enunciar o seguinte teorema.

Teorema 2 *Seja f uma função diferenciável com derivada contínua, definida em um intervalo da $[a, b]$ da reta. Se V é o volume do sólido S gerado pela rotação da região limitada pela reta $y = cx + d$, pelo gráfico da função f e pelas retas t e t' , descrita na Figura 5, em torno do eixo x , então*

$$V = \frac{\pi}{\sqrt{(c^2 + 1)^3}} \int_a^b (cx + d - f(x))^2 |1 + cf'(x)| dx. \quad (19)$$

Fazendo $d = c = 0$ no Teorema 2 temos o seguinte corolário, que traduz a situação mais simples que mencionamos, já conhecida na literatura.

Corolário 1 *Seja f uma função diferenciável com derivada contínua, no intervalo $[a, b]$, com $f(x) \geq 0$. Se V é o volume do sólido obtido pela rotação, da região delimitado pelo eixo x , pelo gráfico da função f e pelas retas $x = a$ e $x = b$, em torno do eixo x , então*

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

4.1. Região delimitada pelo gráfico de duas funções

Sejam f e g funções diferenciáveis com derivadas contínuas definidas nos intervalos $[a, b]$ e $[l, m]$, respectivamente. Considere r a reta cuja equação é dada por $y = cx + d$, conforme mostra a Figura 8 a seguir. Exigimos ainda que as retas t e t' indicadas sejam perpendiculares à reta r . Desejamos calcular o volume do sólido S obtido pela rotação da região R delimitada pelo gráfico das funções f e g , e pelas retas t e t' em torno da reta r .

Note que o volume V do sólido S é dado por $V = V_1 - V_2$, onde V_1 é o volume do sólido S_1 obtido pela rotação da região delimitada pelo gráfico da função f , pelas retas t, t' e r em torno da reta r e V_2 é o volume do sólido S_2 obtido pela rotação da região delimitada pelo gráfico da função g , pelas retas t, t' e r em torno da reta r . Segue imediatamente do Teorema 2 o seguinte corolário.

Corolário 2 *Sejam f e g funções diferenciáveis com derivadas contínuas definidas nos intervalos $[a, b]$ e $[l, m]$, respectivamente e r a reta cuja equação é dada por $y = cx + d$, conforme a Figura 8. Se V é o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada pelo gráfico das funções f e g e pelas retas t e t' em torno da reta r , então*

$$V = \frac{\pi}{\sqrt{(1 + c^2)^3}} \left[\int_a^b (r(x) - f(x))^2 |1 + cf'(x)| dx - \int_l^m (r(x) - g(x))^2 |1 + cg'(x)| dx \right], \quad (20)$$

onde $r(x) = cx + d$.

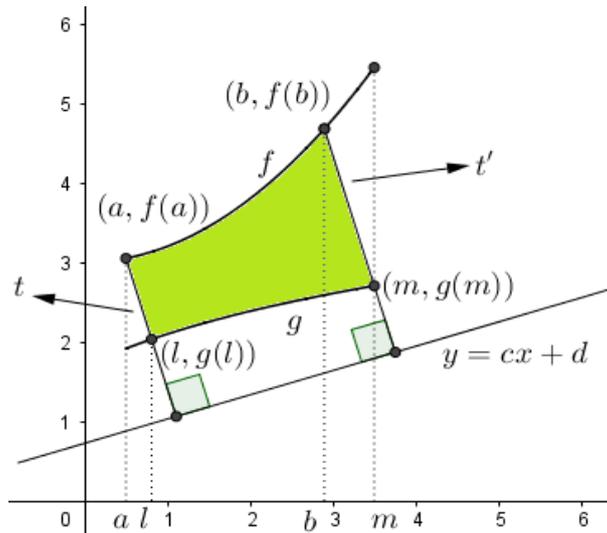


Figure 8. Representação da região R

Em particular, se considerarmos $c = d = 0$, então

$$V = \pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) dx,$$

como já é conhecido na literatura.

Example 1 Sejam $f(x) = x^2 + 8$ definida no intervalo $[1, 2]$ e $g(x) = x + 4$ definida no intervalo $[3, 5]$. O eixo de revolução é a reta r de equação $y = x$. Veja a Figura 9 a seguir. Segue do Corolário 2 que o volume do sólido S obtido ao rotacionar a região

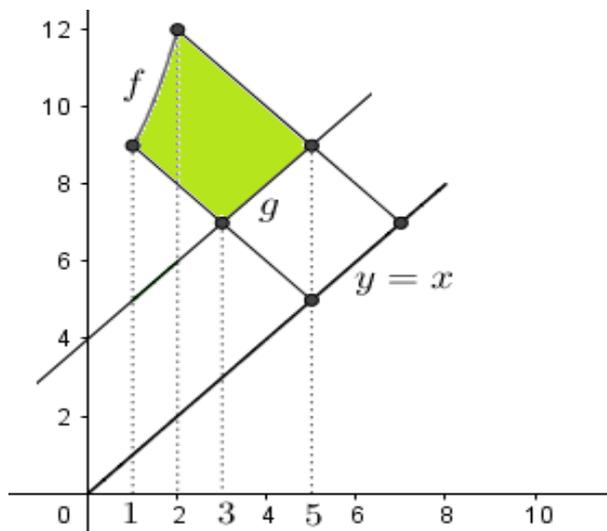


Figure 9. Representação da região R

destacada, em torno da reta r é dado por

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{\sqrt{8}} \int_1^2 (x - x^2 - 8)^2 (1 + 2x) dx + \int_3^5 8 dx \\ &= \frac{1677\pi\sqrt{8}}{40}. \end{aligned}$$

A Figura 10 fornece uma representação do sólido S .

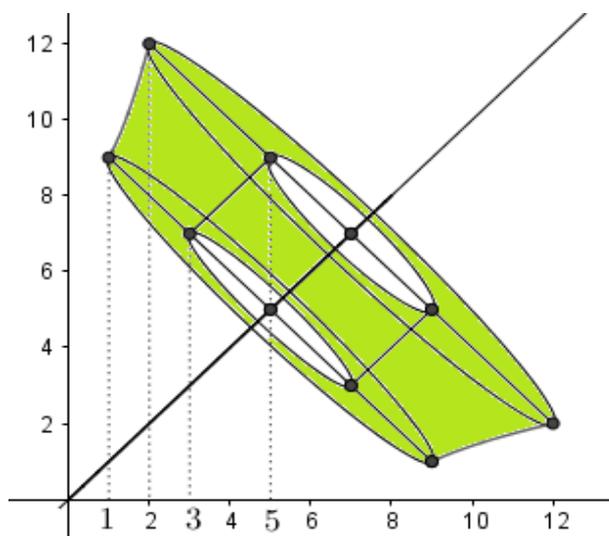


Figure 10. Representação do sólido S

5. Implementação gráfica

Alguns softwares matemáticos utilizam a parametrização (veja [1])

$$X(x, u) = (F(x), G(x) \cos(u), G(x) \sin(u)), \quad (21)$$

para obter uma visualização gráfica do sólido obtido pela rotação da região limitada pelo eixo- x , pelas retas $x = a$ e $x = b$ e pela curva $H(x) = (F(x), G(x))$. A parametrização $X(x, u)$ dada em (21) é obtida identificando-se a curva parametrizada $H(x) = (F(x), G(x))$ do \mathbb{R}^2 com a curva $\bar{H}(x) = (F(x), G(x), 0)$ do \mathbb{R}^3 . Em seguida aplicamos a transformação T_u , dada por (10), em \bar{H} para obter $T_u(\bar{H}(x)) = X(x, u)$.

No nosso caso não é possível usar diretamente o formato da parametrização (21), visto que o eixo de revolução é a reta inclinada $y = cx + d$. Para resolver esse problema vamos efetuar uma translação vertical de $-d$ unidades e em seguida realizar uma rotação $v = \arctan(c)$ radianos no sentido horário, tanto no eixo de revolução quanto na curva $h(x) = (x, f(x))$. Esse procedimento faz com que o eixo de revolução seja o eixo x e a nova curva seja

$$R_v(x, f(x) - d)$$

onde R_v é a transformação linear (5). Como v é fixo, consideramos R_v como uma função de x , isto é, $R_v(x, y) = H(x)$, onde $y = f(x) - d$. Assim, utilizando a transformação dada em (5) obtemos

$$H(x) = (x \cos(v) + (f(x) - d) \sin(v), -x \sin(v) + (f(x) - d) \cos(v)) = (F(x), G(x)).$$

Agora, identificando $H(x)$ com $\bar{H}(x) = (F(x), G(x), 0)$, e aplicando T_u em $\bar{H}(x)$ obtemos

$$X(x, u) = (F(x), G(x) \cos(u), G(x) \sin(u)), \text{ com}$$

$$F(x) = (x \cos(v) + (f(x) - d) \sin(v) \text{ e } G(x) = -x \sin(v) + (f(x) - d) \cos(v). \quad (22)$$

Example 2 Considere a reta $y = x$ como o eixo de revolução e $f(x) = \sqrt{x}$ a curva a ser rotacionada. Neste caso, temos $d = 0$ e $v = \frac{\pi}{4}$. Segue de (22), que

$$X(x, u) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x + \sqrt{x}), \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + \sqrt{x}) \cos(u), \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + \sqrt{x}) \sin(u) \right).$$

A Figura 11 dá uma descrição do sólido, com $x \in [0, 1]$.

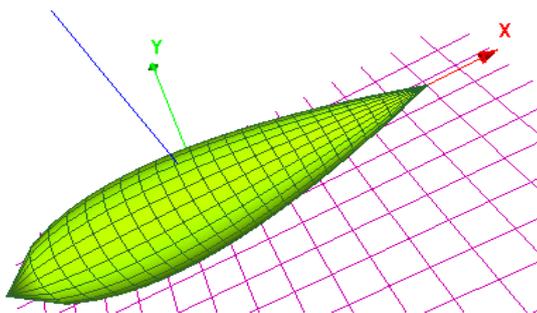


Figure 11. Representação do Sólido S

Example 3 Considere $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$ e $y = x + 2$ o eixo de revolução. Fazendo as devidas substituições em (22) com $d = 2$ e $v = \frac{\pi}{4}$, obtemos a parametrização

$$X(x, u) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}(x^2 + 2x + 4), \frac{\sqrt{2}}{4}(x^2 - 2x + 4) \cos(u), \frac{\sqrt{2}}{4}(x^2 - 2x + 4) \sin(u) \right).$$

Na Figura 12, temos uma representação do sólido S, com x variando de $x = 0$ até $x = 5$.

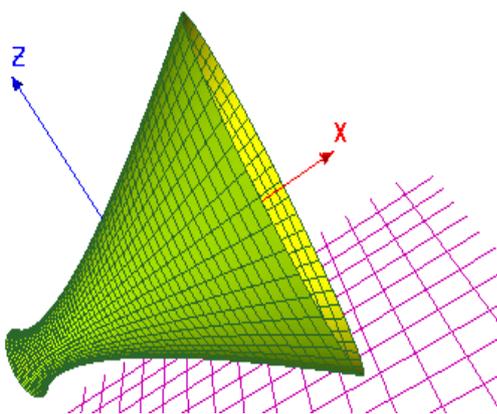


Figure 12. Representação do Sólido S

Example 4 Seja a função dada $f(x) = 5$ com eixo de revolução dado pela reta $y = x$. (Veja a Figura 13). Como $d = 0$ e $v = \frac{\pi}{4}$ segue de (22) que

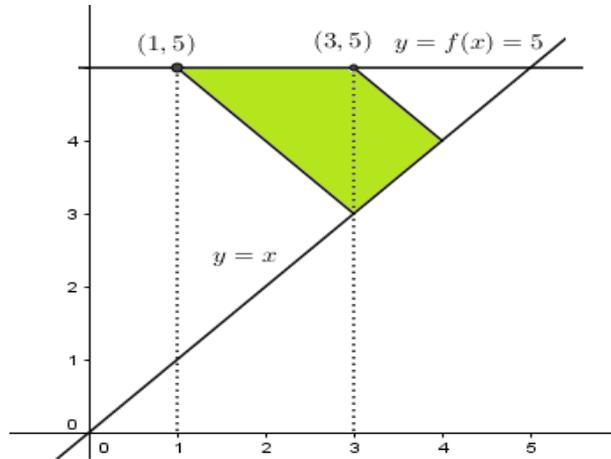


Figure 13. Região a ser rotacionada

$$X(x, u) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x + 5), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-x + 5) \right) \cos(u), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-x + 5) \right) \sin(u) \right). \quad (23)$$

O sólido descrito está na Figura 14, com x variando de $x = 1$ até $x = 3$.

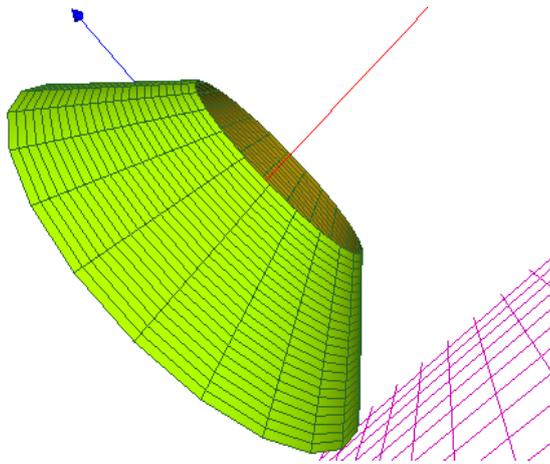


Figure 14. Representação do Sólido S

6. Um cálculo comparativo

Vamos voltar ao Exemplo 4 da seção anterior e calcular o volume do sólido S de duas formas. Primeiro, usando a fórmula de um tronco de cone e depois usando a nossa fórmula do Teorema 2. O sólido S é um tronco de cone cujos raios da base maior e da base menor, denotaremos por R e s , respectivamente e r é a reta de equação $y = x$.

Utilizando a fórmula (2) da distância entre ponto e reta, obtemos que

$$R = d((1, 5), r) = 2\sqrt{2} \text{ e } s = d((3, 5), r) = \sqrt{2}.$$



Vamos denotar por U e V as projeções ortogonais dos pontos $(1, 5)$ e $(3, 5)$ sobre a reta r . Além disso, consideraremos o vetor $u = (1, 1)$ que aponta na direção da reta r . Então, segue de (3) que

$$U = \frac{\langle (1, 5), (1, 1) \rangle}{2} (1, 1) = (3, 3), \quad V = \frac{\langle (3, 5), (1, 1) \rangle}{2} (1, 1) = (4, 4).$$

A altura h do tronco de cone é dada por $h = d(U, V) = \sqrt{2}$. Assim, utilizando a fórmula (4) obtemos

$$V = \frac{\pi\sqrt{2}}{3} [(2\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}^2] = \frac{14\pi\sqrt{2}}{3}.$$

Por outro lado, utilizando o Teorema 2, conferimos o resultado,

$$V = \frac{\pi}{\sqrt{2^3}} \int_1^3 (x-5)^2 (1+0) dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{56}{3} = \frac{14\pi\sqrt{2}}{3}.$$

7. Considerações finais

Em livros didáticos de Cálculo diferencial e integral encontramos uma fórmula integral para o cálculo do volume de um sólido obtido pela rotação de uma curva em torno de um dos eixos coordenados. No nosso trabalho apresentamos uma situação mais geral, onde o eixo de revolução é uma reta não-paralela ao eixo x e nem paralela ao eixo y . Nossa fórmula integral engloba a situação anterior, considerando como hipótese que a função f seja derivável e tenha derivada contínua. Além disso, obtemos uma parametrização do sólido de revolução afim de obter uma representação gráfica por meio do software livre K3D SURF.

References

- [1] Carmo, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, SBM- Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- [2] Lima, E. L. *Álgebra Linear*. 4ª edição. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2000.
- [3] Camargo, I., Boulos, P. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*. PEARSON, 3ª edição, São Paulo, 2005.
- [4] Leithold L. *O Cálculo com Geometria Analítica*. Editora HARBRA LTDA, 3ª edição, São Paulo, 1994.
- [5] https://www.google.com.br/search?q=caminho+de+concreto&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwidj7Sz3pXVAhVDi5AKHcIwDzMQ_AUICCgD&biw=1366&bih=638#imgrc=oyB7yNMGbxFLM
- [6] Giovanni, J. R., Bonjorno, J. R., Jr. *Matemática Fundamental: uma nova abordagem*. FTD SA, São Paulo, 2002.
- [7] Lay, D. C. *Álgebra linear e suas aplicações*. LTC, 3ª edição, Rio de Janeiro, 2011.