RCT - REVISTA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
www.revista.ufrr.br/rct

Trigonometria Complexa no Contexto do Ensino Básico

Franciel Araújo do Nascimento [1], Joselito de Oliveira [2]

[1]Colégio de Aplicação – Universidade Federal de Roraima (UFRR)
Boa Vista – RR – Brasil

[2]Departamento de Matemática – Universidade Federal de Roraima (UFRR)
Boa Vista – RR – Brasil

franciel.nascimento@ufrr.br, joselito.oliveira@ufrr.br

Abstract. Little attention has been given to complex numbers in basic education, since the current approach is restricted to definitions, properties and exercises of theoretical application, as well as the resolution of polynomial equations. This paper, based on a professional master's dissertation in mathematics, has as main objective to present the complex trigonometric functions and their properties, with a focus on basic education. At the end, are compared the complex trigonometric functions with the real trigonometric functions.

Key words: Complex number. Circular trigonometry. Complex trigonometry.

Resumo. Pouca importância se tem dado aos números complexos no ensino básico, uma vez que a abordagem atual se restringe às definições, propriedades e exercícios de aplicação teórica bem como a resolução de equações polinomiais. Este artigo, baseado em uma dissertação de mestrado profissional em matemática, tem como objetivo principal apresentar as funções trigonométricas complexas e suas propriedades, com foco no ensino médio. No final, compara-se as propriedades das funções trigonométricas complexas com as funções trigonométricas reais.

Palavras-chave: Números complexos. Trigonometria circular. Trigonometria complexa.

1. Introdução

A matemática desempenha um papel muito importante na vida dos indivíduos sendo, de um modo geral, capaz de desenvolver o raciocínio lógico, a capacidade de abstrair, projetar e generalizar situações em que ela esteja presente. Além disso, representa uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para a realização de varias tarefas específicas em quase todas as atividades humanas, com destaque para as engenharias e as ciências básicas, em modelos matemáticos são desenvolvidos contribuindo com o entendimento do objeto em estudo. Quando se trata de funções trigonométricas com variáveis reais, vemos o quão é relevante este conhecimento para resolver diversas situações problemas do nosso cotidiano, como podemos ver em [OLIVEIRA 2015]. Isto é possível, pelo fato das funções trigonométricas possuírem uma propriedade fundamental, a de que elas são periódicas. Neste sentido, não podemos deixar de destacar a importância das funções trigonométricas com variável complexa, uma vez que, são também aplicáveis, veja em [SPIEGEL 1972]. Este artigo é parte de uma dissertação apresentada no Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, realizada na Universidade Federal de Roraima-UFRR, e é fruto de uma pesquisa científica baseada na metodologia qualitativa, com foco na pesquisa bibliográfica, veja em [NASCIMENTO 2015]. Apresentamos aqui, uma abordagem básica sobre a trigonometria complexa, mostrando a importância dos números complexos para a formação matemática dos discentes e docentes, tanto do ensino médio quanto da licenciatura plena em matemática. O artigo está dividido da seguinte forma: Na seção dois apresentaremos o conjunto dos números complexos, as operações em $\mathbb{C}$, propriedades, e sua relação com a trigonometria real. Na seção três estudaremos o conceito de funções complexas, apresentando-se como principal exemplo a função exponencial. e suas propriedades. Finalmente, na seção quatro abordaremos o principal objeto de estudo deste artigo, que são as funções trigonométricas complexas, comparando-as com as funções trigonométricas reais.

2. Preliminares

Iniciaremos esta seção apresentando de forma breve, baseado em [GONCALVES 2007], a história de como surgiu os números complexos.

Muitos pensam que os números complexos surgiram com a finalidade de resolver equações do segundo grau que recai no caso em que o descriminante é negativo, mas esta concepção não é verídica. O maior passo que foi dado para que fosse admitida sua existência foi com o resultado dos estudos sobre raízes de equações do terceiro grau.

Um primeiro avanço importante foi dado pelo matemático Girolamo Cardano (1501-1576) em seu livro "Ars Magna" publicado em 1545, na qual mostrou uma maneira de resolver equações do terceiro grau, que hoje é denominada Fórmula de Cardano. Na obra de Cardano, a fórmula foi definida para equações do terceiro grau do tipo $x^3+ax+b=0$, que continha também uma maneira de reduzir uma equação da forma $x^3+ax^2+bx+c=0$ para $y^3+py+q=0$, para isso, basta fazer $x=y-\frac{a}{3}$. A fórmula é dada por:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

O matemático Rafael Bombelli (1526-1572) estudou profundamente o trabalho de Cardano, e ao aplicar a fórmula para a resolução da equação $x^3-15x-4=0$, obteve o valor $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Como sabia que 4 era uma raiz dessa equação, Bombelli concluiu, como pode ser visto em [LIMA 2006], que essa raiz poderia ser obtida pela fórmula, desde que se calculasse $\sqrt{-121}$. Bombelli mostrou que:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2-\sqrt{-1}.$$

Portanto, encontrou $x=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4$. A partir daí, os matemáticos admitiram a existências de números da forma $a+b\sqrt{-1}$, em que $a\in\mathbb{R}$ e $b\in\mathbb{R}_+^*$.

Bombelli trabalhava sistematicamente com o elemento $\sqrt{-1}$, que hoje é chamada de unidade imaginária.

2.1. Os números complexos e suas propriedades

Esta parte da seção aborda o conjunto dos números complexos, as operações de soma e produto de números complexos e suas propriedades, conforme as referências [AVILA 2013] e [CHURCHILL 1975].

Lembramos inicialmente que um número complexo é um número da forma $z = a + bi$, onde i é denominada unidade imaginária, satisfazendo a propriedade $i^2 = -1$, $a, b \in \mathbb{R}$, e que o conjunto dos números complexos é denotado por $\mathbb{C}$. Lembramos ainda, que a parte real e a parte imaginária do número complexo z são definidas por

$$Re\, z = a \;\text{ e }\; Im\, z = b,$$

respectivamente.

Em $\mathbb{C}$ são definidas as operações de soma e produto da seguinte forma: Dados $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$ em $\mathbb{C}$, então

i) $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.
ii) $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$.

As operações de soma e produto de números complexos satisfazem as seguintes propriedades:

Tabela 1. Propriedades da soma e do produto

Propriedades da soma	Propriedades do produto
$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$	$(z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3)$.
$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.	$z_1.z_2 = z_2.z_1$.
$\exists\, 0 \in \mathbb{C} \;\mid z + 0 = z,\ \forall\, z \in \mathbb{C}$.	$\exists\, 1 \in \mathbb{C} \;\mid z.1 = z,\ \forall z \in \mathbb{C}$.
$\forall z \in \mathbb{C}, \exists - z \in \mathbb{C} \mid\ z + (-z) = 0$.	$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \exists\, z^{-1} \in \mathbb{C} \mid z.(z^{-1}) = 1$.
	$z_1.(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3$, $(z_1 + z_2).z_3 = z_1.z_3 + z_2.z_3$.

Fonte: Autor

Observação 2.1 (Potências de i). Observemos que as potências de i são dadas por:

$$\begin{array}{lllll} i^0 = 1 & i^4 = 1 & i^8 = 1 & i^{12} = 1 & \\ i^1 = i & i^5 = i & i^9 = i & i^{13} = i & \cdots \\ i^2 = -1 & i^6 = -1 & i^{10} = -1 & i^{14} = -1 & \\ i^3 = -i & i^7 = -i & i^{11} = -i & i^{15} = -i & \end{array} \tag{1}$$

Note o caráter cíclico das potências de i, já que $1, i, -1$ e $-i$ se repete. Assim, dado $n \in \mathbb{N}$, existe uma maneira prática para determinar i^n. De fato, como $n \in \mathbb{N}$, existem $q, r \in \mathbb{N}$ tal que $n = 4q + r$, ou seja, divisão de n por 4. Assim, temos:

$$\begin{aligned} i^n &= i^{4q+r} \\ &= i^{4q} \cdot i^r \\ &= (i^4)^q \cdot i^r \\ &= i^r. \end{aligned}$$

Portanto, $i^n = i^r$, onde r é o resto da divisão de n por 4.

Consideremos agora o número complexo não nulo $z = a + bi$, sua forma trigonométrica ou polar é dada por $z = r(cos\,\theta + isen\,\theta)$, onde

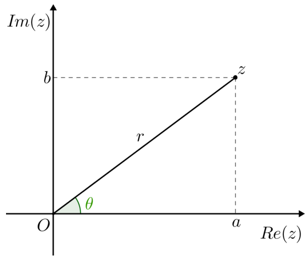

Figura 1.
Fonte: NASCIMENTO (2015, p.52)

$a = rcos\,\theta$, $b = rsen\,\theta$, $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ e $\theta = tg^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ (Veja a figura 1).

O ângulo θ é denominado argumento de z e é denotado por $\theta = arg(z)$. Note que θ não é único, pois a igualdade é também verdadeira para $\theta + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Contudo, podemos determinar θ de maneira única exigindo, por exemplo, que $0 \leqslant \theta < 2\pi$ ou que $-\pi < \theta \leqslant \pi$.

Agora veremos uma importante fórmula, conhecida como fórmula de Euler, que será muito útil para podermos definir a exponencial e^z e, posteriormente, as funções trigonométricas. Para defini-lá, observemos inicialmente as séries de Taylor em torno de 0, veja [BARTLE 2010] e [LIMA 2007] das funções $sen\,y, cos\,y$ e e^y, com $y \in \mathbb{R}$ e e sendo o número de Euler:

$$sen\,y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad (2)$$

$$cos\,y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (3)$$

$$e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \cdots + \frac{y^n}{n!} + \cdots \quad (4)$$

De (1), (2) e (3), obtemos através de operações formais e sem se preocupar com a questão de convergência, que:

$$cos\,y + isen\,y = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \cdots + \frac{(iy)^n}{n!} + \cdots \quad (5)$$

De (4) e (5), é natural que a fórmula de Euler seja definida por:

$$e^{iy} = cos\,y + isen\,y, \quad \forall\ y \in \mathbb{R}.$$

3. Função complexa

Antes de falarmos sobre funções trigonométricas complexas vamos apresentar o conceito de função complexa. Segundo [AVILA 2013] a função complexa pode ser definida da seguinte forma:

Definição 3.1. Uma função complexa $f : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma lei que a cada elemento z pertencente a D associa um único número complexo $w = f(z)$.

Nos reais, as funções possuem representações gráficas. Já no caso complexo, isso não ocorre, pois sendo $\mathbb{C}$ identificado com o $\mathbb{R}^2$, o gráfico, caso existisse estaria no $\mathbb{R}^4$.

Seja $w = f(z)$ onde $w, z \in \mathbb{C}$, precisamos de um plano para a representação de cada uma das variáveis. Para cada ponto (x, y) do plano-z, no domínio de definição de f, existe um ponto (u, v) no plano-w, onde $z = x + yi$ e $w = u + vi$.

A correspondência entre os dois planos é denominado transformação de pontos no plano-z em pontos do plano-w pela função f.

Exemplo 3.1. A função $f(z) = \dfrac{1-z}{1+z}$, transforma o disco unitário centrado em $z = 0$ $D_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ no semiplano $H = \{w \in \mathbb{C} : Re(w) > 0\}$.

Demonstração. Observemos que o domínio da função f é dado por $A = \{z \in \mathbb{C} : z \neq -1\}$, então $D_1(0) \subset A$. Como queremos mostrar que a função f transforma o disco $D_1(0)$ no semiplano H, vamos considerar $z = x + yi \in D_1(0)$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} w &= f(z) \\ &= \frac{1-z}{1+z} \\ &= \frac{1-(x+yi)}{1+(x+yi)} \\ &= \frac{(1-x)-yi}{(1+x)+yi} \cdot \frac{(1+x)-yi}{(1+x)-yi} \\ &= \frac{1-(x^2+y^2)}{(1+x)^2+y^2} - \frac{2y}{(1+x)^2+y^2} i. \end{aligned}$$

Portanto, a parte real de w é igual a:

$$Re\, w = \frac{1-(x^2+y^2)}{(1+x)^2+y^2}. \tag{6}$$

Note que,

$$(1+x)^2 + y^2 > 0. \tag{7}$$

E dá hipótese $|z| < 1$, isto é,

$$1 - (x^2 + y^2) > 0. \tag{8}$$

Portanto, de 6, 7 e 8, segue que $Re\, w > 0$, ou seja, a função f transforma o disco $D_1(0)$ em um semiplano $H = \{w \in \mathbb{C} : Re\, w > 0\}$. Veja a figura 3. $\square$

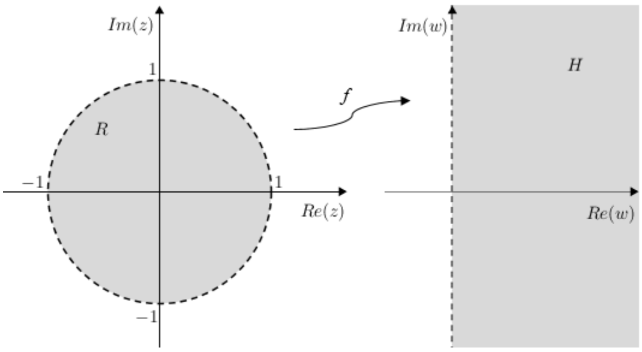

Figura 2.
Fonte: NASCIMENTO (2015, p.69)

3.1. Função exponencial

Para definir as funções trigonométricas complexas, devemos ter como pré-requisito o conceito e propriedades da função exponencial. Portanto, iniciaremos esta seção com a definição da exponencial de um número complexo e suas propriedades. Antes porém, lembremos que $e^t.e^r = e^{t+r}$. Então é natural termos que $e^{x+iy} = e^x.e^{iy}$, que é como se define e^z, conforme podemos ver na definição que segue.

Definição 3.2. Dado um número complexo $z = x + yi$, a exponencial de z é definida por:

$$e^z = e^x(cos\, y + isen\, y).$$

A notação $exp\, z$ é frequentemente usada em lugar de e^z. Mas vamos optar pela notação e^z, uma vez que as propriedades da exponencial, nos casos real e complexo, não entram em contradição, e além disso por se assemelhar a e^x.

Observamos também que $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, pois:

Dado $z = x + yi \in \mathbb{C}$, sabemos que $e^z = e^x \cdot (cos\, y + i \cdot sen\, y)$ e portanto:

$$\begin{aligned} |e^z| &= |e^x \cdot (cos\, y + i \cdot sen\, y)| \\ &= |e^x \cdot cos\, y + ie^x \cdot sen\, y| \\ &= e^x. \end{aligned}$$

Como $e^x > 0$, temos que $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Proposição 3.1. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, então:

i) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$;

ii) $\dfrac{1}{e^{z_1}} = e^{-z_1}$;

iii) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$.

Demonstração. Sejam $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, então:

$i)$ Da definição 3.2, segue que:

$$\begin{aligned}
e^{z_1}.e^{z_2} &= e^{x_1}(cos\, y_1 + i.sen\, y_1).e^{x_2}(cos\, y_2 + i.sen\, y_2)\\
&= e^{x_1+x_2}[cos\, y_1.cos\, y_2 - sen\, y_1.sen\, y_2 + i(sen\, y_1.cos\, y_2 + sen\, y_2.cos\, y_1)]\\
&= e^{x_1+x_2}[cos\,(y_1+y_2) + isen\,(y_1+y_2)]\\
&= e^{(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i}\\
&= e^{z_1+z_2}.
\end{aligned}$$

Da definição 3.2 e do fato de que $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, segue as seguintes provas para os itens i e ii da proposição:

$ii)$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e^{z_1}} &= \frac{1}{e^{x_1}.(cos\, y_1 + isen\, y_1)}\\
&= \frac{1}{e^{x_1}.(cos\, y_1 + isen\, y_1)} \cdot \frac{cos\, y_1 - isen\, y_1}{cos\, y_1 - isen\, y_1}\\
&= e^{-x_1} \cdot \frac{cos\, y_1 - isen\, y_1}{cos^2\, y_1 - i^2 sen^2\, y_1}\\
&= e^{-x_1} \cdot \frac{cos\,(-y_1) + isen\,(-y_1)}{cos^2\, y_1 + sen^2\, y_1}\\
&= e^{-x_1 - y_1 i}\\
&= e^{-z_1}.
\end{aligned}$$

$iii)$ Note que:

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1} \cdot \frac{1}{e^{z_2}}. \tag{9}$$

Segue de 9 e do item ii que:

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1} \cdot e^{-z_2}. \tag{10}$$

Do item i e de 10, temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} &= e^{z_1+(-z_2)}\\
&= e^{z_1-z_2}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. □

Definição 3.3. A função exponencial $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é definida por:

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = e^z,$$

onde $e^z = e^x(cos\, y + isen\, y)$.

Segue direto do fato de que $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ a seguinte proposição:

Proposição 3.2. A função exponencial é não nula em todo o seu domínio $\mathbb{C}$.

A proposição a seguir pode ser encontrada em [FLANIGAN 1972] (1972, p. 121).

Proposição 3.3. A função exponencial $f(z) = e^z$ é periódica de período $2\pi i$, isto é,

$$e^{z+2\pi i} = e^z, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Demonstração. Dado $z = x + yi \in \mathbb{C}$, temos:

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{x+yi+2\pi i} \\ &= e^{x+i(y+2\pi)} \\ &= e^x \cdot e^{i(y+2\pi)}. \end{aligned}$$

Da fórmula de Euler, segue que:

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^x(cos\,(y+2\pi) + isen\,(y+2\pi)) \\ &= e^x(cos\, y + isen\, y) \\ &= e^z. \end{aligned}$$

□

De modo análogo a demonstração da proposição 3.3 prova-se que

$$e^z = e^{z+2\pi i} = e^{z+4\pi i} = e^{z+6\pi i} = \cdots = e^{z+2k\pi i} = \cdots$$

Para o caso particular em que $k = 1$, temos que o período da função exponencial é dado por $2\pi i$, como visto anteriormente.

4. Funções trigonométricas complexas

Nesta seção, baseado em [FERNANDES 2008], apresentaremos as definições das principais funções trigonométricas complexas, a saber: as funções seno, cosseno e tangente.

Definição 4.1 (Função seno). A função seno $sen : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é definida por:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad sen\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Proposição 4.1. Seja $z \in \mathbb{C}$, então $sen\, z = 0$ se e somente se $z = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. De fato, seja $z = x + yi \in \mathbb{C}$, temos que:

$$\begin{aligned} sen\, z &= sen\,(x+yi) \\ &= \frac{e^{i(x+yi)} - e^{-i(x+yi)}}{2i} \\ &= \frac{e^{-y}.(cos\, x + isen\, x) - e^{y}.(cos\, x - i.sen\, x)}{2i} \\ &= (cos\, x) \cdot \left(\frac{-e^{y} + e^{-y}}{2i}\right) + (isen\, x) \cdot \left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2i}\right) \\ &= (sen\, x) \cdot \left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) + (icos\, x) \cdot \left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right). \end{aligned}$$

Vamos denotar $A(y) = \dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2}$ e $B(y) = \dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2}$. Com isso, temos:

$$sen\, z = sen\, x.A(y) + i.cos\, x.B(y). \tag{11}$$

Observe que, $A(y) > 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$, e $B(y) = 0$ se e somente se $y = 0$. Continuando, de 11, $sen\, z = 0$ se e somente se

$$sen\, x.A(y) = 0 \tag{12}$$

e

$$cos\, x.B(y) = 0. \tag{13}$$

Da igualdade 12 e do fato que $A(y) > 0$, temos que $sen\, x = 0$, isto é, $x = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Substituindo $x = k\pi$ em 13, devemos ter $B(y) = 0$, pois, $cos\, k\pi \neq 0, \forall k \in \mathbb{Z}$. Assim, como $B(y) = 0$, temos que $y = 0$. Portanto, $sen\, z = 0$ se e somente se $z = k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. □

Proposição 4.2. A função seno é periódica de período 2π.

Demonstração. Considerando a definição da função seno, dado $z \in \mathbb{C}$ temos que:

$$\begin{aligned} sen\,(z + 2\pi) &= \frac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} \\ &= \frac{e^{iz} \cdot e^{i(2\pi)} - e^{-iz} \cdot e^{i(-2\pi)}}{2i} \\ &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ &= sen\, z. \end{aligned}$$

Portanto, a função seno é periódica de período 2π. □

Definição 4.2 (Função cosseno). A função cosseno $cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é definida por:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ \ cos\, z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Proposição 4.3. Seja $z \in \mathbb{C}$, então $cos\, z = 0$ se e somente se $z = \pi/2 + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Proposição 4.4. A função cosseno é periódica de período 2π.

As demonstrações das proposições 4.3 e 4.4 são análogas as realizadas nas proposições 4.1 e 4.2, respectivamente.

Proposição 4.5. As funções seno e cosseno nos complexos são ilimitadas.

Demonstração. Considerando que:

$$cos\,(x + yi) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \forall z = x + yi \in \mathbb{C}. \tag{14}$$

Tomando-se $x = 0$ em (14), segue que:

$$\begin{aligned} |cos\,(yi)| &= \left| \frac{e^{i(yi)} + e^{-i(yi)}}{2} \right| \\ &= \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}, \end{aligned}$$

Note que, quando y cresce indefinidamente, e^{-y} tende a zero, enquanto que e^{y} cresce rapidamente e, portanto, $|cos\,(yi)|$ também cresce indefinidamente, isto é, a função cosseno não é limitada em $\mathbb{C}$. □

De forma análogo, prova-se que a função complexa seno é ilimitada.

Definição 4.3 (Função tangente). Seja $A = \{a \in \mathbb{C} : a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$. A função tangente $tg : A \longrightarrow \mathbb{C}$ é definido por:

$$\forall z \in A, \ \ tg\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}.$$

Proposição 4.6. Seja $z \in \mathbb{C}$, então $tg\, z = 0$ se e somente se $z = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Seja $z \in \mathbb{C}$, sendo $tg\, z = \dfrac{sen\, z}{cos\, z}$, das proposições 4.1 e 4.3, segue o resultado. □

Proposição 4.7. A função tangente é periódica de período π.

Demonstração. Dado $z \in A$, temos que:

$$
\begin{aligned}
tg\,(z+\pi) &= \frac{e^{i(z+\pi)} - e^{-i(z+\pi)}}{i(e^{i(z+\pi)} + e^{-i(z+\pi)})} \\
&= \frac{e^{iz} \cdot e^{i\pi} - e^{-iz} \cdot e^{-i\pi}}{i(e^{iz} \cdot e^{i\pi} + e^{-iz} \cdot e^{-i\pi})} \\
&= \frac{-e^{iz} + e^{-iz}}{i(-e^{iz} - e^{-iz})} \\
&= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} \\
&= tg\,z.
\end{aligned}
$$

□

4.1. Comparação das funções seno, cosseno e tangente do ponto de vista real e complexo

No que segue, apresentaremos uma tabela em que podemos comparar as propriedades das funções seno, cosseno e tangente, do ponto de vista real e complexo.

Observe através da tabela que as principais propriedades da trigonometria complexa são iguais ao do caso real.

Observe ainda que as funções trigonométricas complexas seno e cosseno são ilimitadas, conforme proposição 4.5, ao contrário do caso real.

Tabela 2. Comparação das propriedades trigonométricas

$cos^2x + sen^2x = 1$	$cos^2z + sen^2z = 1$
$sen(x \pm y) = senx\ cosx \pm cosx\ senx$	$sen(z \pm w) = senz\ cosw \pm cosz\ senw$
$cos(x \pm y) = cosx\ cosy \mp senx\ seny$	$cos(z \pm w) = cosz\ cosw \mp senz\ senw$
$sen(-x) = -senx$	$sen(-z) = -senz$
$cos(-x) = -cosx$	$cos(-z) = -cosz$
$sen(x+\pi) = -senx$	$sen(z+\pi) = -senz$
$cos(x+\pi) = -cosx$	$cos(z+\pi) = -cosz$
$sen(\frac{\pi}{2} - x) = cosx$	$sen(\frac{\pi}{2} - z) = cosz$
$cos(\frac{\pi}{2} - x) = senx$	$cos(\frac{\pi}{2} - z) = senzx$
$sen2x = 2senxcosx$	$sen2z = 2senzcosz$
$cos2x = cos^2x - sen^2x$	$cos2z = cos^2z - sen^2z$
$tg(x+y) = \dfrac{tgx + tgy}{1 - tgx.tgy}$	$tg(z+w) = \dfrac{tgz + tgw}{1 - tgz.tgw}$
$tg(-x) = -tgx$	$tg(-z) = -tgz$

Fonte: Autor

5. Considerações finais

Fizemos uma abordagem das funções trigonométricas complexas voltada para os alunos e professores do Ensino Médio e das Licenciaturas em Matemática. Assim, abordamos cada função apresentando suas definições, exemplos, proposições e propriedades. Vimos ainda, que as principais propriedades no caso real são também válidas para caso complexo, como por exemplo, a importante relação fundamental, $sen^2 z + cos^2 z = 1$. Mas também vimos duas propriedades de funções complexas trigonométricas que diferenciam do caso real. São as funções seno e cosseno que, ao contrário do caso real, no caso complexo são ilimitadas. Diferenciando assim a teoria das funções trigonométricas complexas da teoria das funções trigonométricas reais.

Referências

AVILA, G. Variáveis complexas e aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 2013. 271 p.

BARTLE, R. G. & SHERBERT, D. R. Introduction to real analysis, 4th. ed. Illinois: Jonh Willey & Sons, 2010.

CHURCHILL, R. V. Variáveis complexas e suas aplicações. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil e Editora da universidade de São Paulo, 1975. 276 p.

FERNANDES, C. S.; BERNARDEZ, N. C. J. Introdução às funções de uma variável complexa. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2008. 224 p.

FLANIGAN, F. J. Complex variables: Harmonic and analytic functions. New York: Dover Publications, Inc, 1972. 353 p.

GONÇALVES, A. Introdução à álgebra. Projeto Euclides. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. 194 p.

LIMA, E. L. Curso de análise, v.1, 12 ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada-IMPA, 2007.

LIMA, E. L. et al. A matemática do ensino médio: coleção professor de matemática. v. 3. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 252 p.

NASCIMENTO, F. A. Funções trigonométricas complexas: uma abordagem voltada para o ensino médio. 2015. 113 p. Dissertação (Mestrado em Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal de Roraima, Boa Vista, 2015.

OLIVEIRA, J. S. Aplicações da trigonometria nas ciências.2015. 124 p. Dissertação (Mestrado em Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal de Roraima, Boa Vista, 2015.

SPIEGEL, M. R. Variáveis complexas. coleção schãum. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, LTDA, 1972. 468 p.