RCT - REVISTA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
www.revista.ufrr.br/rct

Hiperplano e n-Esfera: Posições Relativas

Joselito de Oliveira[1], Wender Ferreira Lamounier [2]

[1]Departamento de Matemática– Universidade Federal de Roraima (UFRR)
Boa Vista – RR – Brazil

[2]Escola de Aplicação – Universidade Federal de Roraima (UFRR)
Boa Vista – RR – Brazil

joselito.oliveira@ufrr.br, wender.lamounier@ufrr.br

Abstract. In the flat analytic geometry are studied the line, the circle and their relative positions. In this paper, similarly is presented a study of the relative positions of the hyperplane and of the n-sphere, in the euclidian space n-dimentional. Initially, will be presented a study of the relative positions between the hyperplane and the n-sphere. After, relative positions between the hyperplanes are presented. And, finally, we study the relative positions between n-spheres. Particular cases in $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$ are seen.

Resumo. Na Geometria Analítica Plana são estudados a reta, o círculo e as suas posições relativas. Neste artigo, de forma semelhante é apresentado um estudo das posições relativas do hiperplano e da n-esfera, no espaço euclidiano n-dimensional. Inicialmente apresenta-se um estudo sobre as posições relativas entre o hiperplano e a n-esfera. Depois, as posições relativas entre hiperplanos são apresentados. E, finalmente estuda-se as posições relativas entre n-esferas. Casos particulares em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ são vistos.

1. Introdução

Na Geometria Analítica Plana e Espacial estuda-se as posições relativas de retas e planos, que são exemplos de hiperplanos em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Estuda-se também a posição relativa: entre circunferência e reta e entre circunferências. Com relação as posições relativas da esfera, desconhecemos se há algum estudo a respeito. Já em [LAMOUNIER 2014] encontra-se um estudo no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ das posições relativas entre o hiperplano e a $(n-1)$-esfera, onde o principal resultado é apresentado aqui de modo diferenciado. Neste artigo estuda-se as posições relativas envolvendo hiperplanos e $(n-1)$ -esferas, elementos do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Além das proposições que caracteriza as posições relativas dos referidos objetos geométricos, apresenta-se o conceito de hipersecante. Em [MILLMAN 1977] e [MENDELSON 1990] a definição de $(n-1)$-esfera restringi-se ao caso em que o raio vale um e o centro é a origem. Aqui, sem perda de generalidades vamos considerar a $(n-1)$-esfera com raio maior ou igual a um e centro em um ponto qualquer do $\mathbb{R}^n$. O artigo está organizado da seguinte forma: Na seção dois encontra-se a matemática necessária ao entendimento das seções seguintes. Sua leitura poderá ser dispensada. A seção três trata das posições relativas entre hiperplanos. Na seção quatro as posições relativas entre $(n-1)$-esferas.

2. Preliminares

Nessa seção serão apresentadas as ferramentas matemáticas que servirão de suporte teórico para o desenvolvimento do artigo. Para iniciar esta seção apresenta-se alguns conceitos básicos que podem ser encontrados nas referências [LIMA2 2005] e [SPIVAK 2003].

Definição 2.1. Seja $n \in \mathbb{Z}_+$, denota-se por $\mathbb{R}^n$ o produto cartesiano de n fatores iguais a $\mathbb{R}$, isto é, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$.

As operações seguintes fazem do $\mathbb{R}^n$ um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

Dados $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ vetores do $\mathbb{R}^n$ e um número real α, as operações de soma $x + y$ e o produto $\alpha \cdot x$ são definidas por:

i) $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$;
ii) $\alpha \cdot x = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \ldots, \alpha \cdot x_n)$.

Observação 2.1. O elemento neutro para a adição é o $0 = (0, 0, ..., 0)$ e o simétrico de x $= (x_1, x_2, ..., x_n)$ é $-x = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$, uma vez que $x + (-x) = 0$.

O conceito de simetria se faz presente da seguinte forma: sejam $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, y é o simétrico de x se, e somente se, $y_1 = -x_1, y_2 = -x_2, ..., y_n = -x_n$.

Dados dois vetores $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, o produto interno de x e y aqui considerado é dado por $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Exemplo 2.1. De acordo com a definição 2.1, temos os seguintes espaços euclidianos: a reta $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$; o plano $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ e o espaço $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Lembramos que dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ são ortogonais quando $\langle x, y\rangle = 0$.

Para o nosso estudo vamos considerar a norma euclidiana, isto é, o número real dado por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, onde $x \in \mathbb{R}^n$.

Com base na norma pode-se definir a distância em $\mathbb{R}^n$ do seguinte modo:

Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, a distância de x à y é definida por:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Dessa forma dados $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ e $Q = (q_1, q_2, ..., q_n)$, pontos do $\mathbb{R}^n$, então $d(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (p_i - q_i)^2}$.

O conceito de hiperplano pode ser encontrado em [COELHO 2001] e [LANG 2003], mas aqui será enunciado considerando o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.2. Seja $v \neq 0$ um vetor do $\mathbb{R}^n$. O conjunto dos pontos X do $\mathbb{R}^n$ denotado por Γ^{n-1}, que passa pelo ponto P do $\mathbb{R}^n$ e é normal ao vetor v tal que

$$\langle X - P, v\rangle = 0$$

é denominado **hiperplano**.

Sendo o hiperplano, que passa pelo ponto $P = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n$ e é normal ao vetor $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, o conjunto Γ^{n-1} dos pontos $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ do $\mathbb{R}^n$ que satisfaz a equação $\langle (X - P), v\rangle = 0$. E sendo ainda $X - P = (x_1 - p_1, ..., x_n - p_n)$ e $v \perp (X - P)$, então

$$\langle (x_1 - p_1, ..., x_n - p_n), (v_1, ..., v_n) \rangle = v_1 x_1 + ... + v_n x_n - p_1 v_1 - ... - p_n v_n,$$

ou seja, $v_1x_1+...+v_nx_n+d = 0$, onde $d = -p_1v_1-...-p_nv_n$. E esta é a equação do hiperplano Γ^{n-1}, que passa pelo ponto P e é normal ao vetor $v = (v_1, ..., v_n)$.

Exemplo 2.2. No plano, caso em que $n = 2$, o hiperplano é a conhecida equação da reta

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + d = 0,$$

objeto de estudo da geometria analítica plana.

Exemplo 2.3. No espaço, caso em que $n = 3$, o hiperplano é a conhecido como equação do plano

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + d = 0.$$

Apresentaremos a seguir a definição de $(n-1)$-esfera e a equação que à representa no $\mathbb{R}^n$, particularizando para $n = 1, 2$ e 3. Em [MILLMAN 1977] e [MENDELSON 1990] a definição de $(n-1)$-esfera é restrita ao caso em que o raio vale um e o centro é a origem. Sem perda de generalidades iremos considerar a $(n-1)$-esfera em que o raio é maior ou igual a um e centro sendo um ponto qualquer do $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.3. Uma $(n-1)$- esfera no $\mathbb{R}^n$ de raio $r > 0$ e centro c é o conjunto $\mathbb{S}_r^{n-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n; d(c, x) = r\}$, onde $n \geq 1$.

Note que, sendo $d(c, x) = r$, onde $x = (x_1, ..., x_n)$ e $c = (c_1, ..., c_n)$, então $(x_1 - c_1)^2 + ... + (x_n - c_n)^2 = r^2$, que é a equação da $(n-1)$-esfera de centro c e raio r. Portanto, a $(n-1)$-esfera pode ser escrita como sendo o conjunto

$$\mathbb{S}_r^{n-1}(c) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i)^2 = r^2\}.$$

Exemplo 2.4. Dados $c = (c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, então:

1. Para $n = 1$, a 0-esfera $\mathbb{S}_r^0(c) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - c)^2 = r^2\} = \{c - r, a + r\}$;
2. Para $n = 2$, a 1-esfera $\mathbb{S}_r^1(c) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{i=1}^{2} (x_i - c_i)^2 = r^2\}$ é o círculo de centro $c = (c_1, c_2)$ e raio $r > 0$;
3. Para $n = 3$, a 2-esfera $\mathbb{S}_r^2(c) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^{3} (x_i - c_i)^2 = r^2\}$ é a esfera de centro $c = (c_1, c_2, c_3)$ e raio $r > 0$.

Observação 2.2. Para $n \geq 4$ a $(n-1)$-esfera é denominada hiperesfera.

As posições relativas entre o hiperplano e a $(n-1)$-esfera foram estudas em [LAMOUNIER 2014], conforme a seguinte proposição:

Proposição 2.1. Sejam Γ^{n-1} um hiperplano que passa pelo ponto $P = (p_1, ..., p_n)$ do $\mathbb{R}^n$ e $v = (v_1, ..., v_n)$ um vetor normal a Γ^{n-1}, e seja $\mathbb{S}_r^{n-1}(c)$ uma $(n-1)$-esfera de centro $c = (c_1, ..., c_n)$ e raio $r > 0$.

a. $d(c, \Gamma^{n-1}) > r$ se, e somente se, $\Gamma \cap \mathbb{S}_r^{n-1}(c) = \varnothing$;
b. $d(c, \Gamma^{n-1}) = r$ se, e somente se, $\Gamma \cap \mathbb{S}_r^{n-1}(c) = \{P_0\}$. Neste caso dizemos que o hiperplano é tangente a $(n-1)$-esfera;

c. $d(c, \Gamma^{n-1}) < r$ se, e somente se, $\mathbb{S}_r^{n-1}(c) \cap \Gamma^{n-1} = \mathbb{S}^{n-2}_{\sqrt{r^2-k^2}}(q)$, onde $\mathbb{S}^{n-2}_{\sqrt{r^2-k^2}}(q)$ é a $(n-2)$-esfera contida no plano Γ^{n-1} que tem raio $\sqrt{r^2-k^2}$ com centro em q, ponto de intersecção do plano Γ^{n-1} com a reta l normal a Γ^{n-1} que passa pelo centro c da $(n-1)$-esfera $\mathbb{S}_r^{n-1}(c)$, e $k = d(c, \Gamma^{n-1})$.

Motivados pela proposição 2.1, nas próximas seções estudaremos as posições relativas entre hiperplanos e e as posições relativas entre $(n-1)$- esferas. Os resultados apresentados existem para os casos $n = 2$ (plano) e $n = 3$ (espaço), porém o caso $n > 3$, salvo engano, não encontra-se na literatura.

3. Posições relativas entre hiperplanos

Na geometria analítica plana e espacial estuda-se as posições relativas de retas e planos, que são hiperplanos em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Aqui, estudaremos posições relativas entre hiperplanos no $\mathbb{R}^n$.

Sejam Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} hiperplanos, observa-se intuitivamente que se Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} são paralelos o ângulo entre eles é igual a zero.

Com base no conceito de ângulo entre planos dado em [SANTOS 2007] definimos ângulo entre hiperplanos da seguinte forma:
Definição 3.1. Sejam Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} hiperplanos com vetores normais u e v, respectivamente. O ângulo entre Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1}, denotado por $\angle(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1})$, é dado por

$$\angle(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) = cos^{-1}(\frac{|< u, v >|}{\|u\|.\|v\|}).$$

Definição 3.2. Dois hiperplanos Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} são ortogonais se o ângulo entre eles é igual a $90°$.

A próxima proposição nos dá a caracterização de hiperplanos ortogonais.
Proposição 3.1. Sejam Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} hiperplanos com vetores normais u e v, respectivamente. Então

$$\Gamma_1^{n-1} \perp \Gamma_2^{n-1} \text{ se, e somente se, } < u, v >= 0.$$

Proof. $< u, v >= 0 \Leftrightarrow cos\angle(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) = cos(u, v) = 0 \Leftrightarrow$
$\angle(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) = 90°$, isto é, $\Gamma_1^{n-1} \perp \Gamma_2^{n-1}$.

□

Definição 3.3. Dois hiperplanos Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} são iguais ou paralelos se o ângulo entre êles é igual a zero.

Para demonstração da proposição seguinte precisamos do seguinte lema, cuja a demonstração pode ser vista em [COELHO 2001].
Lema 3.1. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e W um subespaço próprio de V. Então W é um hiperplano se, e somente se, $dim_k W = n - 1$.
Proposição 3.2. Sejam Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} hiperplanos, tendo como vetores normais u e v, respectivamente. Então:

i) u e v são colineares se, e somente se, Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} são paralelos ou iguais;
ii) u e v não são paralelos se, e somente se, $\Gamma_1^{n-1} \cap \Gamma_2^{n-1} = \Gamma^{n-2}$, onde $n \geq 2$.

Proof. Sejam Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} hiperplanos distintos com vetores normais $u = (u_1, ..., u_n)$ e $v(v_1, ..., v_n)$, respectivamente e com equações

$$u_1x_1 + ... + u_nx_n + d_1 = 0 \tag{1}$$

e

$$v_1x_1 + ... + v_nx_n + d_2 = 0. \tag{2}$$

i) $\Rightarrow$) Suponha que u e v são vetores colineares, então existe $t \in \mathbb{R}^*$ tal que $u = tv$. Logo,

$$\begin{aligned} \angle(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) &= cos^{-1}(\frac{|< u, v >|}{\|u\|.\|v\|}) \\ &= cos^{-1}(\frac{|< tv, v >|}{\|tv\|.\|v\|}) \\ &= cos^{-1}(1). \end{aligned}$$

Daí $cos\angle(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) = 1$ e portanto $\angle(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) = 0$, isto é, $\Gamma_1^{n-1}//\Gamma_2^{n-1}$ ou $\Gamma_1^{n-1} = \Gamma_2^{n-1}$.

$\Leftarrow$)

(a) Se $\Gamma_1^{n-1} = \Gamma_2^{n-1}$, então $u = v$.

(b) Suponha que $\Gamma_1^{n-1}//\Gamma_2^{n-1}$, como para cada $w \in \Gamma_2^{n-1}$ existe um representante w' de w em Γ_1^{n-1} então $< w', u >= 0$, já que $u \perp \Gamma_1^{n-1}$. Daí temos que $< w, u >= 0$ e sendo w arbitrário, então $u \perp \Gamma_2^{n-1}$. Portanto, $u//v$, isto é, existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $u = \lambda v$.

ii) $\Rightarrow$) Suponha u e v não paralelos, pelo item (i) Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} não são paralelos, ou seja, $\Gamma_1^{n-1} \cap \Gamma_2^{n-1} \neq \emptyset$.

Dado $p = (x_1, ..., x_n) \in \Gamma_1^{n-1} \cap \Gamma_2^{n-1}$ então $p \in \Gamma_1^{n-1}$ e $p \in \Gamma_2^{n-1}$. Portanto,

$$u_1x_1 + ... + u_nx_n + d_1 = 0 \tag{3}$$

e

$$v_1x_1 + ... + v_nx_n + d_2 = 0. \tag{4}$$

Suponha sem perda de generalidades que $v_n \neq 0$, então

$$x_n = -\frac{d_2}{v_n} - \frac{u_1}{v_n} - ... - \frac{u_{n-1}}{v_n}. \tag{5}$$

Substituindo-se (5) em (3), obtemos

$$A_1x_1 + ... + A_{n-1}x_{n-1} + d = 0, \tag{6}$$

onde $A_i = u_iv_n - u_nv_i$, com $1 \leq i \leq n-1$, e $d = d_1v_n - u_nd_2$.

Note que esta é a equação de um hiperplano Γ^{n-2} com vetor normal $v = (A_1, ..., A_n)$. Logo $p \in \Gamma^{n-2}$ e portanto $\Gamma_1^{n-1} \cap \Gamma_2^{n-1} \subseteq \Gamma^{n-2}$.
Agora, como Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} são hiperplanos então $\Gamma_1^{n-1} \cap \Gamma_2^{n-1}$ é também um hiperplano. Pelo lema $dim(\Gamma_1^{n-1} \cap \Gamma_2^{n-1}) = dim\Gamma_1^{n-1} - 1 = n - 2$. Como $dim\Gamma^{n-2} = n - 2$ então $\Gamma_1^{n-1} \cap \Gamma_2^{n-1} = \Gamma^{n-2}$.

$\square$

4. Posições relativas entre $(n-1)$-esferas

Como no caso dos hiperplanos, aqui iremos apresentar as posições relativas entre $(n-1)$-esferas. Lembramos inicialmente que no espaço euclidiano duas esferas são iguais se possuem mesmo raio e o mesmo centro. E que são concêntricas se possuem o mesmo centro. No caso em que temos duas $(n-1)$-esferas a situação é a mesma. No que segue veremos como pode ser caracterizado este fato do ponto de vista da Geometria Analítica.
Proposição 4.1. *Sejam* $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ *e* $\mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ $(n-1)$-esferas de centros $a = (a_1, ..., a_n)$ e $b = (b_1, ..., b_n)$, respectivamente. Então:

i) $r_1 = r_2$ e $d(a, b) = 0$ se, e somente se, $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) = \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$;

ii) $r_1 \neq r_2$ e $d(a, b) = 0$ se, e somente se, $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ e $\mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ são concêntricas e não coincidentes.

Proof.
i) $\Rightarrow$) Como $r_1 = r_2$, então

$$x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \Rightarrow (x_1 - a_1)^2 + ... + (x_n - a_n)^2 = r_1^2 = r_2^2.$$

E sendo $d(a, b) = 0$ então $a = b$, ou seja, $a_i = b_i, 1 \leq i \leq n$. Daí,

$$r_2^2 = (x_1 - a_1)^2 + ... + (x_n - a_n)^2 = (x_1 - b_1)^2 + ... + (x_n - b_n)^2$$

Logo $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ e portanto $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \subset \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$. Analogamente prova-se que $\mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) \subset \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ obtendo-se assim a igualdade.
$\Leftarrow$) Vamos provar que se $r_1 \neq r_2$ ou $d(a, b) \neq 0$ então $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \neq \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$.

Suponha que $d(a, b) \neq 0$ então $a \neq b$. Se $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) = \emptyset$, nada temos a provar. Suponha então que $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) \neq \emptyset$, logo existe $x \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ tal que $x \notin \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$. Daí, $x \notin \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ e portanto $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \neq \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$. Se $r_1 \neq r_2$, sem perda de generalidades podemos supor $r_2 > r_1$. Vamos supor também que $d(a, b) = 0$, caso contrario caímos no caso anterior e a proposição estará provada. Sendo assim $a = b$. Agora, dado $x \in \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ então $| x - b |= r_2$ e daí $| x - a |=| x - b |= r_2 > r_1$. Logo $x \notin \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ e portanto $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \neq \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$.

ii) $\Rightarrow$) Como $d(a, b) = 0 \Rightarrow a = b$ e sendo $r_1 \neq r_2$ podemos supor sem perda de generalidades que $r_1 < r_2$. Agora, dado $x \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ então $| x - a |= r_1 < r_2$ e portanto $x \notin \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$. Logo $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ e $\mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ são concêntricas não coincidentes.

$\Leftarrow$) Sendo $\mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)$ e $\mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)$ concêntricas então $d(a,b)=0$. Como elas não são coincidentes, isto é, $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \neq \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)$, então pela proposição 4.1 item (i) temos que $r_1 \neq r_2$.

$\square$

Duas S^1 esferas são ditas secantes se possuem dois pontos em comum. Para n-esferas, com $n \geqslant 2$, o conceito é análogo.
Definição 4.1. Duas n-esferas $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a)$ e $\mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)$, onde $n \geq 2$, são ditas hipersecantes se existe uma $(n-2)$-esfera $\mathbb{S}^{n-2}_{r}(c)$ tal que $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b) = \mathbb{S}^{n-2}_{r}(c)$.

No caso em que $n=3$ temos que $\mathbb{S}^{2}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{2}_{r_2}(b) = \mathbb{S}^{1}_{r}(c)$. Portanto, as esferas $\mathbb{S}^{2}_{r_1}(a)$ e $\mathbb{S}^{2}_{r_2}(b)$ são hipersecantes.
Proposição 4.2. Sejam $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a)$ *e* $\mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)$ $(n-1)$-esferas de centros $a=(a_1,...,a_n)$ e $b=(b_1,...,b_n)$, respectivamente. Então:

i) $d(a,b) > r_1 + r_2$ se, e somente se, $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b) = \varnothing$;

ii) $d(a,b)$ é igual a $r_1 + r_2$ ou $|r_1 - r_2|$ se, e somente se, $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b) = \{p\}$;

iii) $\mid r_1 - r_2 \mid < d(a,b) < r_1 + r_2$ se, e somente se, $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b) = \mathbb{S}^{n-2}_{r}(c)$.

Proof.
i) $\Rightarrow$) Suponha que $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b) \neq \varnothing$, então existe $p=(p_1,...,p_n) \in \mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)$ e portanto $p \in \mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a)$ e $p \in \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)$. Daí $d(p,a) = r_1$ e $d(p,b) = r_2$. Agora $d(a,b) \leq d(a,p) + d(p,b) = r_1 + r_2$.
$\Leftarrow$) Suponha que $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b) = \varnothing$, vamos provar que $d(a,b) > r_1 + r_2$. Sendo $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a)$ e $\mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)$ fechados então

$$\begin{aligned} d(\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a), \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b) \quad) &= min\{d(x,y) \mid x \in \mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \;\text{ e }\; y \in \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)\} \\ &= d(x_0,y_0) > 0, \end{aligned}$$

pois $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b) = \varnothing$.
Portanto,

$$d(a,b) = d(a, \mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a)) + d(\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a), \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)) + d(\mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b), b) > r_1 + r_2.$$

ii) $\Rightarrow$) Seja $x : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a curva que liga os pontos a e b definida por

$$x(t) = (1-t)a + tb, 0 \leq t \leq 1,$$

onde $x(0) = a, \;\; x(1) = b$.

Vamos supor inicialmente que $d(a,b) = r_1 + r_2$. Seja $x(t_0) \in \mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a)$ então

$$r_1 = \|x(t_0) - a\| = \|(1-t_0)a + bt_0 - a\| = \|b-a\|t_0 = (r_1+r_2)t_0 \;.$$

Logo $t_0 = \dfrac{r_1}{r_1+r_2}$. Agora,

$$p = x(t_0) = x(\frac{r_1}{r_1+r_2}) = \frac{r_2}{r_1+r_2}a + \frac{r_1}{r_1+r_2}b.$$

Daí, $\|p-b\| = \dfrac{r_2}{r_1+r_2}\|a-b\| = r_2$. Logo $p \in \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)$ e portanto $p \in \mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)$.

Vamos supor agora, sem perda de generalidades, que $r_1 > r_2$ e que $d(a,b) = r_1 - r_2$, então

$$r_1 = \|x(t_0) - a\| = \|(1-t_0)a + bt_0 - a\| = \|b-a\|t_0 = (r_1 - r_2)t_0.$$

Logo, $t_0 = \dfrac{r_1}{r_1 - r_2}$. Agora,

$$p = x(t_0) = x(\frac{r_1}{r_1 - r_2}) = -\frac{r_2}{r_1 - r_2}a + \frac{r_1}{r_1 - r_2}b.$$

Sendo assim, $\|p - b\| = \dfrac{r_2}{r_1 - r_2}\|b - a\| = r_2$. Logo $p \in \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)$ e portanto $p \in \mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)$.

Sendo $x(t_0)$, em quaisquer dos dois casos, único, então $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b) = \{p\}$.
$\Leftarrow$) Supomos agora que $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b) = \{p\}$, então existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $x(t_0) = p$.
Como $p \in \mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a)$ então $r_1 = \|p - a\| = \|b - a\|t_0 = d(a,b)t_0$.
Enquanto que $p \in \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)$ implica que $r_2 = \|p - b\| =\mid t_0 - 1 \mid d(a,b)$.
Daí, $(t_0 - 1)d(a,b) = -r_2$ ou $(t_0 - 1)d(a,b) = r_2$. Como $d(a,b) > 0$ então $(1 - \dfrac{r_1}{d(a,b)})d(a,b) = r_2$ ou $(1 - \dfrac{r_1}{d(a,b)})d(a,b) = -r_2$. Portanto $d(a,b) = r_1 + r_2$ ou $d(a,b) = r_1 - r_2$.

iii) Como $d(a,b) > r_1 + r_2$ pelo item (i) desta proposição temos que $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b) \neq \varnothing$. Logo, existe $p = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)$. Daí,

$$(x_1 - b_1)^2 + ... + (x_n - b_n)^2 = r_2^2 \tag{7}$$

e

$$(x_n - a_n)^2 = r_1^2 - (x_1 - a_1)^2 - ... - (x_{n-1} - a_{n-1})^2. \tag{8}$$

Note que

$$(x_i - b_i)^2 = (x_i - a_i)^2 + 2(a_i - b_i)(x_i - a_i) + (a_i - b_i)^2, \tag{9}$$

onde $1 \leq i \leq n$.
De 7, 8 e 9 obtemos

$$2(a_1 - b_1)x_1 + ... + 2(a_n - b_n)x_n + b_1^2 + ... + b_n^2 - a_1^2 - ... - a_n^2 = r_2^2 - r_1^2.$$

Portanto p pertence à um hiperplano Γ^{n-1}, que tem como vetor normal $v = (a_1 - b_1, ..., a_n - b_n)$.
Como $d(a, \Gamma^{n-1}) < r_1$ então pela proposição 2.1 temos que

$$S^{n-1}_{r_1}(a) \cap \Gamma^{n-1} = S^{n-2}_{\sqrt{r_1^2 - k^2}}(q),$$

onde $S^{n-2}_{\sqrt{r_1^2 - k^2}}(q)$ é a $(n-2)$-esfera contida no hiperplano Γ^{n-1} tendo q como centro, ponto de interseção de Γ^{n-1} com a reta l normal a Γ^{n-1} e que passa por a e por b. Além disso $k = d(a, \Gamma^{n-1})$.

$\square$

References

COELHO, Flávio Uchoa.; LOURENÇO, Mary Lilian.(2001). Um curso de álgebra linear. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo.

LAMOUNIER, Wender Ferreira.(2014). A geometria análitica do ensino médio no contexto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Boa Vista. 61f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT)- Universidade Federal de Roraima.

LANG, Serge.(2003). Álgebra linear: traduzido da terceira edição em inglês. 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna.

LIMA, Elon Lages.(2005). Curso de análise Vol.2. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA.

MILLMAN, Richard S.; PORKER, George D.(1977). Elements of Differential Geometry New Jersey: Prentice Hall.

MENDELSON, Bert.(1990). Introduction to topology New York: Dover Publications.

SANTOS, Nathan Moreira dos.(2007). Vetores e matrizes: uma introdução a álgebra linear. 4. ed. São Paulo: Thomson Pioneira.

SPIVAK, Michael.(2003) O cálculo em variedades. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda.