Revista Agro@mbiente On-line, v. 12, n. 4, p. 245-257, outubro - dezembro, 2018
Centro de Ciências Agrárias - Universidade Federal de Roraima, Boa Vista, RR
www.agroambiente.ufrr.br
10.18227/1982-8470ragro.v12i4.5166

Artigo Original

ISSN 1982-8470

Bayesian Modelling of the effects of nitrogen doses on the morphological characteristics of braquiaria grass

Modelagem Bayesiana do efeito de doses do nitrogênio nas caraterísticas morfológicas do capim-braquiária

Luiz Henrique Marra da Silva Ribeiro[1*], Matheus de Souza Costa[2], Luiz Alberto Beijo[3], Alberto Frank Lázaro Aguirre[1], Tatiane Gomes de Araújo[1], Josiane dos Santos Alves[1]

Abstract: The Bayesian approach in regression models has shown good results in parameter estimations, where it can increase accuracy and precision. The objective of the current study was to analyze the application of Bayesian statistics to the modeling yield for leaf dry matter (LM) and stem (SM), in kg ha^{-1}, leaf ratio (LR), crude protein content for leaves (CPL) and stem (CPS) (%) of Brachiaria grass as a function of varying N doses (0; 100; 200 and 300 kg ha^{-1} yr^{-1}). Simple and two degree polynomial linear regression models were analyzed. Information for a priori distributions was obtained from the literature. A posteriori distribution was generated using a Monte Carlo method via Markov chains. Parameters significance was assyed with HPD (*Highest Posteriori Density*) with a 95% interval. Model selections was performed using DIC (*Deviance Information Criterion*); and adjustment quality estimated with means and 95% HPD for Bayesian R^2 distribution ranges. The models selected for the variables LM, SM and CPS were linear, while for LR and CPL, they were second level polynomial. The lowest doses that maximize response variables were: LM: 274 ha^{-1}yr^{-1}, SM: 280 ha^{-1}yr^{-1}, LR: 113 ha^{-1}yr^{-1}, CPL: 265 ha^{-1}yr^{-1}, CPS: 289 ha^{-1}yr^{-1}. The Bayesian approach allowed the inclusion of literature-verified a priori information, and the identification of evidence optimization range intervals.

Key words: Bayes factor. Regression models. A priori information. Optimization.

Resumo: A abordagem Bayesiana em modelos de regressão tem apresentado bons resultados em estimações de parâmetros, podendo aumentar acurácia e precisão. Assim, objetivou-se analisar a aplicação da estatística Bayesiana para modelar dados da produção de matéria seca das folhas (MF) e do colmo (MC), em kg ha^{-1}, da razão foliar (RF), do teor de proteína bruta da folha (PBF) e do colmo (PBC) (%) do capim-braquiária em função de doses de N (0; 100; 200 e 300 kg ha^{-1}ano^{-1}). Foram analisados modelos de regressão linear simples e polinomial de grau dois. As informações para as distribuições a priori foram obtidas da literatura e a distribuição a posteriori por métodos Monte Carlo via cadeias de Markov. As significâncias dos parâmetros foram verificadas pelo intervalo HPD (*Highest Posterior Density*) de 95%. As seleções dos modelos foram realizadas via DIC (*Deviance Information Criterion*); a qualidade dos ajustes pelas médias e intervalos HPD de 95% da distribuição do R^2 Bayesiano. Os modelos selecionados para as variáveis MF, MC e PBC foram lineares, enquanto para RF e PBF foram polinomiais de grau dois. As menores doses que maximizam as variáveis respostas foram: MF: 274 ha^{-1}ano^{-1}, MC: 280 ha^{-1}ano^{-1}, RF: 113 ha^{-1}ano^{-1}, PBF: 265 ha^{-1}ano^{-1}, PBC: 289 ha^{-1}ano^{-1}. A abordagem Bayesiana possibilitou a inclusão de informações a priori verificadas na literatura e a identificação de intervalos de evidências para a otimização.

Palavras-chave: Fator de Bayes. Modelos de regressão. Priori informativa. Otimização.

*Corresponding author
Submitted for publication on 27/08/2018 and approved 08/11/2018
[1]Mestrandos do Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria; 37130-000, Rua Gabriel Monteiro da Silva, 700, Alfenas – MG – Brasil, luiz.marra@outlook.com, número de telefone: +55 37 999282809; flazaro2857@gmail.com; tatigomesaraujo@yahoo.com.br; josiane.alves@gouro.com.br;
[2]Graduando em Licenciatura em Matemática, matheusmsc2012@gmail.com;
[3]Professor de Estatística do Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria prof.beijo@gmail.com.

INTRODUCTION

Pasture is the main and most economical source of food in livestock (SKONIESKI *et al.*, 2011). Brachiaria is a form used widely in Brazil, covering about 85% of those regions growing on low fertility soils, and being recommended for situations where extensive technological resources are lacking (MOREIRA *et al.*, 2011).

In general, livestock farming has low production rates due to poor pasture quality, caused by, among other factors, a system of over-exploitation that speeds soil nutrient exhaustion, and by low, or poorly, distributed rainfall indices (MAGALHÃES *et al.*, 2007). Thus, the use of fertilizers can raise production rates, avoid pasture degradation, and assist biodiversity preservation (MARANHÃO *et al.*, 2010).

Nitrogen (N) is the and nutrient most required for grass production. Because N is generally scarce, or unavailable, in tropical soils, is also the most limiting (SKONIESKI *et al.*, 2011). Costa (2010) found that nitrogen fertilization had a positive linear effect on dry mass and on the regrowth of Marandu grass. The same linear effect was reported for leaf mass, and a second degree relation was found for stem mass and leaf ratio by Magalhães *et al.* (2007) and Maranhão *et al.* (2010). Martuscello *et al.* (2011) also reported a significant increase in productivity (total dry mass, dry leaf mass and stems) of brachiaria fertilized with 100 kg ha^{-1} of N.

A number of studies have reported applications of first and second degree linear regression models for modeling characteristics of a variety of grass species (FAGUNDES, 2005; COELHO, 2012; SILVA *et al.*, 2012; BONFIM-SILVA *et al.*, 2014; CARMEIS FILHO *et al.*, 2014). Application of these models can be used to assay which dose range optimize the desired characteristics (CABRAL *et al.*, 2013).

In regression models, the Bayesian approach has been shown to work well for parameter estimation, while the use of informative a priori distributions has improved precision and accuracy of subsequent inferences (CARVALHO *et al.*, 2017). Compared to frequency inference, this form of analysis is also efficienct at predicting future values (SILVA *et al.*, 2009). In addition, for small sample sizes, this method can minimize estimate biase, producing more precise credibility ranges for parameters, which facilitates statistical analysis when comparing parameter curves from different treatments (ROBERT, 2007; MARTINS FILHO, 2008). In addition, this approach is more consistent with reality, since it considers that, like the observations, the parameters involved are also random variables and, therefore, have probability distributions (ROBERT, 2007).

INTRODUÇÃO

A pastagem é a principal e mais econômica fonte de alimento na pecuária (SKONIESKI *et al.*, 2011). O tipo braquiária é muito utilizado no Brasil, abrange cerca de 85% das regiões cultivadas e se desenvolve em solos pouco férteis, sendo indicados para sistemas que não exigem grandes recursos tecnológicos (MOREIRA *et al.*, 2011).

De modo geral, a pecuária apresenta baixos índices de produção devido à baixa qualidade dos pastos, ocasionada, dentre outros fatores, pela exploração em excesso que promove a exaustão dos nutrientes do solo e por índices pluviais baixos e mal distribuídos (MAGALHÃES *et al.*, 2007). Assim, a utilização de práticas como a adubação pode elevar as taxas de produção, evitar a degradação da pastagem e ajudar na preservação da diversidade biológica (MARANHÃO *et al.*, 2010).

O nitrogênio (N) é o nutriente mais limitante e requerido para a produção de gramíneas. Em solos tropicais, o N é escasso e se encontra muitas vezes indisponível (SKONIESKI *et al.*, 2011). Costa (2010) verificou que a adubação nitrogenada apresentou efeito linear positivo na massa seca e na recuperação do capim-marandu. O mesmo efeito linear foi verificado para massa das folhas, e uma relação de segundo grau foi verificada para massa do colmo e razão foliar por Magalhães *et al.* (2007) e Maranhão *et al.* (2010). Martuscello *et al.* (2011) também verificaram aumento significativo nas características produtivas (massa seca total, massa seca de lamina foliar e colmos) de braquiária adubada com 100 kg ha^{-1} de N em consórcio com estilosantes.

Na literatura, é possível verificar aplicações de modelos de regressão linear de primeiro e segundo graus para modelagem de características de diversas espécies de capim (FAGUNDES, 2005; COELHO, 2012; SILVA *et al.*, 2012; BONFIM-SILVA *et al.*, 2014; CARMEIS FILHO *et al.*, 2014). A aplicação desses modelos pode ser utilizada para a verificação de quais intervalos de doses otimizam as características desejadas (CABRAL *et al.*, 2013).

Em modelos de regressão, a abordagem Bayesiana tem apresentado resultados satisfatórios na estimação de parâmetros, sendo que a utilização de distribuições a priori informativas melhoraram a precisão e a acurácia das inferências (CARVALHO *et al.*, 2017). Ela também apresenta eficiência na predição de valores futuros em comparação à inferência frequentista (SILVA *et al.*, 2009). Além disso, em tamanhos amostrais reduzidos, essa teoria consegue minimizar vieses de estimativas, produzindo intervalos de credibilidade mais precisos para os parâmetros, o que facilita a análise estatística ao se comparar os parâmetros de curvas oriundas de tratamentos diferentes (ROBERT, 2007; MARTINS FILHO, 2008). Além disso, essa abordagem considera que, assim como as observações, os parâmetros também são variáveis aleatórias, portanto, possuem distribuições de probabilidade, sendo mais condizente com a realidade (ROBERT, 2007).

The approach uses the following method: initial (or a priori) information about the parameters of an analyzed model, prior to use of random variables; a probabilistic model of the random variable Y, from which a likelihood function is obtained; applation of the Bayes theorem, generating the a posteriori distribution, which is a parameter-conditioned data distribution, which combines the initial information via a priori distribution and the data information, actualized by means of the likelihood function (TEODORO *et al.*, 2015).

In view of these facts, the objective was to analyse, using Bayesian statistics, leaf dry matter yield, leaf ratio, leaf ratio and crude protein content of leaf and stem of the grass *Brachiaria decumbens* Stapf as a function of different doses of nitrogen.

Nessa teoria, utilizam-se os seguintes conceitos: uma informação inicial (ou a priori) sobre os parâmetros de um modelo analisado, anterior à observação de variáveis aleatórias; um modelo probabilístico da variável aleatória Y, de onde se obtém a função de verossimilhança; aplicando-se o teorema de Bayes, é gerada uma distribuição a posteriori, que é uma distribuição do parâmetro condicionada aos dados, que combina a informação inicial, por meio da distribuição a priori, e a informação dos dados, por meio da função de verossimilhança (TEODORO *et al.*, 2015).

Diante desses fatos, objetivou-se ajustar, através da estatística Bayesiana, dados da produção de matéria seca das folhas e do colmo, da razão foliar, o teor de proteína bruta da folha e do colmo do capim *Brachiaria decumbens Stapf* em função de diferentes doses de nitrogênio.

MATERIALS AND METHODS

Regression models

According to Hoffmann (2016), assuming that the mean of the response variable has a normal distribution, the simple and second degree polynomial linear regression models (hereafter to be called the quadratic model), are written according to Equations 1 and 2:

MATERIAL E MÉTODOS

Modelos de regressão

Segundo Hoffmann (2016), assumindo-se que a média da variável resposta possui uma distribuição normal, os modelos de regressão linear simples e polinomial de grau dois, que a partir daqui será chamado modelo quadrático, são escritos conforme as Equações 1 e 2:

$$y_{ij}=\beta_0+\beta_1 x_i+e_{ij} \qquad (1)$$

$$y_{ij}=\beta_0+\beta_1 x_i+\beta_2 x_i^2+e_{ij}, \qquad (2)$$

Where y_{ij} is the dependant variable, x_i is the independant variable, for the dose i and repetition j, respectively, where i = 1, 2, ..., 4 and j = 1, 2, 3. O β_0 represents the intersection of the line with the y axis β_1 is the line angle parameter, in equation (1). β_0, β_1 and β_2 are the parameters of the quadratic model in equation (2). And e_i is the random error of the i-th observation, que which has μ=0 and variance σ^2.

The linear model can also be represented in the matrix form $\mathbf{y} = \mathbf{X\beta}+\mathbf{e}$, where $\mathbf{y}$ is the vector for the dependant variable observations, 4x1, $\mathbf{X}$ is the matrix of the independent variables observations, 4x3, $\boldsymbol{\beta}$ is the vector for the parameters 3x1, and $\mathbf{e}$ is the vector for the errors, 4x1.

Bayesian analysis

According to Robert (2007), by analogy to Bayes' Theorem, the a posteriori distribution ($\boldsymbol{\pi(\beta,\tau \mid y)}$) is proportional to the product of the likelihood function ($\mathbf{L(y \mid \beta,\tau)}$) with the a priori distribution ($\mathbf{P(\beta,\tau)}$). Assuming independence between functions, a posteriori distribution is given by the following $\boldsymbol{\pi(\beta,\tau \mid y)\ \alpha\ L(y \mid \beta,\tau)\ P(\beta,\tau)}$.

Em que y_{ij} é a variável dependente, x_i é a variável independente, para a dose i e repetição j, respectivamente, em que i = 1, 2, ..., 4 e j = 1, 2, 3. O β_0 representa a interseção da reta no eixo y; β_1 é o parâmetro de inclinação da reta, na equação (1). β_0, β_1 e β_2 são os parâmetros do modelo quadrático na equação (2). Já e_i é o erro aleatório na i-ésima observação, que possui média μ=0 e variância σ^2.

O modelo de regressão linear também pode ser representado na forma matricial $\mathbf{y} = \mathbf{X\beta}+\mathbf{e}$, em que $\mathbf{y}$ é o vetor de observações da variável dependente, 4x1, $\mathbf{X}$ é a matriz de observações da variável independente, 4x3, $\boldsymbol{\beta}$ é o vetor de parâmetros 3x1, e $\mathbf{e}$ é o vetor de erros, 4x1.

Análise Bayesiana

Segundo Robert (2007), por analogia ao Teorema de Bayes, a distribuição a posteriori ($\boldsymbol{\pi(\beta,\tau \mid y)}$) é proporcional ao produto da função de verossimilhança ($\mathbf{L(y \mid \beta,\tau)}$) com a distribuição a priori ($\mathbf{P(\beta,\tau)}$). Assumindo-se independência entre as funções, a distribuição a posteriori é dada pela seguinte forma $\boldsymbol{\pi(\beta,\tau \mid y)\ \alpha\ L(y \mid \beta,\tau)\ P(\beta,\tau)}$.

According to Martins Filho *et al.* (2008), when Bayesian modeling is applied to the parameters of a regression model in this case, the likeelihood function of the response variable "y", following a normal distribution, will be given by Equation 3:

$$L(Y|\beta,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{4}\prod_{j=1}^{3}\frac{\tau^{1/2}}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\tau}{2}\left[y_{ij}-(X\beta)\right]^2\right\}, \quad (3)$$

Where y_{ij} s the response variable for the i-th dose of nitrogen at repetition j, and $\tau=1/\sigma^2$ é o is the inverse varience of **Y**.

For liklihood functions we used data in the Tables 2, 3 and 4 of Magalhães *et al*. (2007). The following variables were tested: leaf mass (LM), stem mass (SM), leaf ratio (LR), total crude protein contente for leaves (CPL) and stems (CPS). The experiment was set up using a fully randomized design, with a 4 × 3 factorial scheme, with 4 N doses (0; 100; 200 and 300 kg $ha^{-1}yr^{-1}$) and 3 for phosphorous. The three phosphorus doses were considered repetitions of the N doses because they did not show significant interactions (p>0.05).

A priori distributions

For a priori distributions, we defined: τ**~Gama (a=0.01; b=0.01)** and β_k**~N** $(\mu_k, \sigma_{\beta k}^{\ 2})$ where k=0 and 1 for the linear regression model; and k=0.1 and 2 for the quadratic.The parameters with the the a priori distribution (**a, b,** μ_k **e** $\sigma_{\beta k}^{\ 2}$) were considered hyperparameters.

The values μ_k e $\sigma_{\beta k}^{\ 2}$ were obtained from the work of Fagundes *et al.* (2005) and Santos *et al.* (2010). These authors worked with the same grass, in the summer and with Brazilian soil, with doses of nitrogen in kg $ha^{-1}yr^{-1}$, as did Magalhães *et al.* (2007).

To set the a priori distributions, we used the following a priori data: for MF, LM and LR, approximate values of daily leaf mass gain rates (DLMG) and daily total mass gain rates (TLMG) from Fagundes *et al.* (2005). As with Magalhães *et al.* (2007) mass gain was recorded after 84 days, and the total mass is leaf mass added to stem mass, and a priori LM data were calculated by multiplying DLMG by 84 (**LM=84xDLMG**). As in the study above, the total mass was here considered to be that of the stem plus leaf, and stem mass was given by total mass subtracted from leaf mass. Accordingly, SM was calculated by subtracting DLMG from TLMG and then multiplying by 84 (**SM=84X(DLMG-TLMG)**). The foliar ratio was calculated from the ratio of LM to SM (**LR=LM/SM**).

De acordo com Martins Filho *et al.* (2008), quando a modelagem Bayesiana é aplicada aos parâmetros de um modelo, de regressão neste caso, a função de verossimilhança da variável resposta, seguindo uma distribuição normal, será dada pela Equação 3:

Sendo y_{ij} a variável resposta na dose de nitrogênio i e repetição j, e $\tau=1/\sigma^2$ é o inverso da variância de **Y**.

Para a verossimilhança, foram utilizados os dados das Tabelas 2, 3 e 4 de Magalhães *et al.* (2007). Como variáveis respostas, foram avaliadas as características utilizadas pelo autor: massa da folha (MF), massa do colmo (MC), razão foliar (RF), teor de proteína bruta da folha (PBF) e teor de proteína bruta do colmo (PBC). O experimento foi montado em um delineamento experimental inteiramente casualizado, em esquema fatorial 4×3, sendo 4 doses de N (0; 100; 200 e 300 kg $ha^{-1}ano^{-1}$) e 3 de fósforo. As três doses de fósforo foram consideradas repetições das doses de N por não apresentarem interações significativas (p>0,05).

Distribuição a priori

Para as distribuições a priori, foram definidos: τ**~Gama (a=0,01; b=0,01)** e β_k**~N** $(\mu_k, \sigma_{\beta k}^{\ 2})$ sendo k=0 e 1 para modelo de regressão linear; e k=0,1 e 2 para o quadrático. Os parâmetros das distribuições a priori (**a, b,** μ_k **e** $\sigma_{\beta k}^{\ 2}$) são denominados hiperparâmetros.

Os valores de μ_k e $\sigma_{\beta k}^{\ 2}$ foram obtidos com base nos trabalhos de Fagundes *et al.* (2005) e Santos *et al.* (2010). Esses autores trabalharam com a mesma gramínea, no verão e em solo brasileiro, com doses de nitrogênio em kg $ha^{-1}ano^{-1}$, como Magalhães *et al.* (2007).

Na elicitação das distribuições a priori, foram usadas informações, chamadas aqui de dados a priori. Para a MF, MC e RF, foram utilizados os valores aproximados das taxas de ganho de massa da folha diárias (TGMF) e taxas de ganho de massa total diárias (TGMT) de Fagundes *et al.* (2005). Como os valores de Magalhães *et al.* (2007) estão em ganho de massa após 84 dias, e a massa total é a massa da folha somada à massa dos colmos, os dados a priori da MF foram calculados multiplicando-se TGMF por 84 (**LM=84xDLMG**). Como, no estudo, a massa total foi considerada a do colmo somada à da folha, a massa do colmo é a massa total subtraída à da folha. Então, MC foi calculado subtraindo TGMF da TGMT e, em seguida, multiplicando por 84 (**SM=84X(DLMG-TLMG)**). A razão foliar foi calculada pela razão de MF por MC (**LR=LM/SM**).

For a priori data on crude leaf protein (CPL), and crude stem protein (CPS) contents we used values for green leaf crude protein (GLCP) and dead stem crude protein (DLCP) contente from Santos *et al.* (2010). The green leaves plus dead leaves gave a value for total leaves, a similar calculation being used for the stem.

From the a priori data, linear and quadratic regression models were adjusted using A frequency-based approach. The 95% confidence intervals for the parameters were tested, using normal distributions as a priori distributions. The a priori distributions for the parameters were defined as normal distributions with quantiles of 2.5 and 97.5%, equal to the values for the lower and upper limits, respectively, of parameters 95% confidence intervals.

Para os dados a priori do teor de proteína bruta da folha (PBF) e teor de proteína bruta do colmo (PBC), foram utilizados os valores de teor de proteína bruta da folha verde (PBFV), teor de proteína bruta da folha morta (PBFM), teor de proteína bruta do colmo verde (PBCV) e teor de proteína bruta do colmo morto (PBCM) de Santos *et al.* (2010). As folhas verdes somadas às folhas mortas resultam nas folhas totais, o que também é válido para o colmo.

De posse dos dados a priori, modelos de regressão linear e quadráticos foram ajustados pela abordagem frequentista. Foram verificados os intervalos de confiança de 95% para os parâmetros, sendo utilizadas distribuições normais como distribuições a priori. As distribuições a priori dos parâmetros foram definidas como distribuições normais com quantis de 2,5 e 97,5% iguais aos valores dos limites inferiores e superiores, respectivamente, dos intervalos de confiança de 95% dos parâmetros.

A posteriori distributions

Robert (2007) and Martins Filho (2008) explain that marginal distribution of the parameter can be obtained via integration of the a posteriori distribution in relation to the other parameters, that is: $\boldsymbol{\pi(\beta_k \mid y) = \int \pi(\beta \mid y)\, d\beta_{\beta \neq \beta_k}}$.

However, the solutions of these marginal theorems often do not have closed analytic solution. Bayesian analyzes were consequently performed using the OpenBUGS (THOMAS; O'HARA, 2007) for sequential Markov Chain sampling of Monte Carlo simulations (MCMC).

Parameter estimates for adjusted models were determined using a posteriori distributions.

Following Roberts (2007), a test of the hypothesis $\mathbf{H_0{:}\beta_k{=}0}$ **vs** $\mathbf{H_1{:}\beta_k{\neq}0}$ will be rejected if it is found that $\mathbf{H_0}$ is 0 **ЕHPD**$\boldsymbol{\beta_{,95\%}}$. This occurs when the ЕHPD (highest posteriori density) value for 95% of the parameter is less than the interval for the spatial paraemter that has 95% probability of containing the parameter is determined from a posteriori distributions of the parameter.

In each situation, for linear and quadratic models, an initial MCMC 200,000 chain was simulated with a burn in of 20,000 and a thin of 20, giving a final chain of 9,000. Chain convergence was tested using Geweke (1992)'s criteria (|ZG|). Absolute values less than 1.96 suggested no indication of convergence. The independance of chain elements was tested with a Raftery and Lewis (1992) fator (RL), where values close to 1 indicate there are no signs of dependence between chain elements. Chain stationarity was assayed using the Heidelberger and Welch (1983) test (HW), where the values-p (HW) above 0.05 indicate no signs of non-stationarity.

Distribuição a posteriori

Robert (2007) e Martins Filho (2008) explicam que a obtenção da distribuição marginal do parâmetro é via integração da distribuição a posteriori em relação aos demais parâmetros, ou seja, $\boldsymbol{\pi(\beta_k \mid y) = \int \pi(\beta \mid y)\, d\beta_{\beta \neq \beta_k}}$.

Entretanto, as soluções dessas marginais muitas vezes não possuem solução analítica fechada. Então, as análises Bayesianas foram realizadas utilizando-se o OpenBUGS (THOMAS; O'HARA, 2007) por simulações amostrais sequenciais de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC).

As estimativas dos parâmetros dos modelos ajustados foram determinadas pelas médias das distribuições a posteriori.

Foi realizado o teste das hipóteses $\mathbf{H_0{:}\beta_k{=}0}$ **vs** $\mathbf{H_1{:}\beta_k{\neq}0}$ de acordo com Roberts (2007), sendo rejeitada a hipótese $\mathbf{H_0}$ is caso verificado 0 **ЕHPD**$\boldsymbol{\beta_{,95\%}}$. Em que ЕHPD (do inglês, *highest posterior density*) de 95% do parâmetro é o menor intervalo no espaço paramétrico que possui 95% de probabilidade de conter o parâmetro e é determinado a partir da distribuição a posteriori dos parâmetros.

Em cada situação, para modelos linear e quadrático, foi simulada uma cadeia MCMC de tamanho inicial de 200.000, com queima (*burn in*) de 20.000 e salto (*thin*) de 20, gerando uma cadeia final de tamanho 9.000. A convergência das cadeias foi verificada utilizando-se o critério de Geweke (1992) (|ZG|). Valores absolutos menores que 1,96 sugerem que não há indícios de não convergência. A independência dos elementos das cadeias foi verificada por meio do fator de Raftery e Lewis (1992) (RL), em que valores próximos de 1 indicam não haver sinais de dependência dos elementos das cadeias. A estacionariedade das cadeias foi verificada com a utilização do teste de Heidelberger e Welch (1983), no qual valores-p (HW) acima de 0,05 indicam não haver sinais de não-estacionariedade.

Model selection

Models wwere selected using DIC (deviance information criteria) calculated with OpenBUGS (THOMAS; O'HARA, 2007), where a difference of ten units or more between DIC of two models was considered as criterion of selection of the model, selecting the one with the lower DIC (SPIEGELHALTER *et al*., 2002). If this difference is not found, the model with the highest a posteriori mean fot the Bayesian coefficient of determination (R_B^2) was slected. To calculate R_B^2, a notation of the predictive distribution is required.

Lewis *et al.* (2013) presented the $\mathbf{Y(\tilde{Y})}$ a posteriori predictive distribution of the values conditioned to the data vector of the response variable **y** in the model **M**. In this representation, the distribution of $\tilde{\mathbf{y}}$ is obtained using the model parameters ($\boldsymbol{\beta}_M$) derived from the a posteriori distribution in the following manner: $\mathbf{P(\tilde{y} \mid y,M) = \int P(\tilde{y} \mid \beta_M,M)\ \pi(\beta,\tau \mid y)\ d\beta_M}$, where $\tilde{\mathbf{y}}_{ij}$ is an element $\tilde{\mathbf{y}}$, and i is the number of doses studied , and J is the size of the MCMC chain . Consequently, the value $\tilde{\mathbf{y}}$ is obtained by the substitution of vectors for the model parameters ($\tilde{\boldsymbol{\beta}}_M$) in Equations (1) and (2) for the values of the explanatory variables used to find ($\tilde{\mathbf{X}}$).

The coefficient of determination indicates the percentage of observed data variability that can be explained by the model (HOFFMANN, 2016). To test the determination coefficient, a posteriori predictive vectors were simulated for the same values as the observed explanatory variable (thus generating a prediction vector $\tilde{\mathbf{y}}$).

After generating a chain of 9000 values, a mean and HPD interval of 95% of a posteriori distribution of RB_2 were used for the interpretation of real data:

$$R_B{}^2 = \frac{Var(\tilde{y})}{Var(\tilde{y}) + Var(\mathbf{d})}, \qquad (4)$$

Where Var($\tilde{\mathbf{y}}$) is the varience of the vector of predicted values, Var(**d**) is the varience of the vector of deviations from the predicted value compared to the observed value ($\mathbf{d_i = \tilde{y}_i - y_i}$).

After generating a chain of 9.000 R_B^2 values, a mean and HPD interval of 95% of a posteriori distribution were used for the interpretation of real data.

Optimization Analysis

The doses of N that provide maximum response variables values are of great importance. However, nitrogen fertilization has a cost. Thus, it is desirable to determine lower dosage ranges that can generate values close to, but smaller than, the maximum response variable value, making it possible to reduce costs with fertilization for the same plant response.

Seleção de modelos

Os modelos foram selecionados por meio do DIC (deviance information criteria) calculado pelo OpenBUGS (THOMAS; O'HARA, 2007), sendo que uma diferença de dez unidades ou mais entre DIC de dois modelos foi considerada como critério de seleção do modelo, selecionando-se o de menor DIC (SPIEGELHALTER *et al*., 2002). Caso não se verifique essa diferença, seleciona-se o modelo com maior média a posteriori do coeficiente de determinação Bayesiano (R_B^2). Para o cálculo do R_B^2, necessita-se da notação da distribuição preditiva.

Lewis *et al.* (2013) apresentaram a distribuição preditiva $\mathbf{Y(\tilde{Y})}$ a posteriori dos valores de condicionados ao vetor de dados das variáveis resposta **y** e ao modelo **M**. Nessa representação, a distribuição de $\tilde{\mathbf{y}}$ é obtida utilizando-se os parâmetros do modelo ($\boldsymbol{\beta}_M$) advindos da distribuição a posteriori da seguinte forma: $\mathbf{P(\tilde{y} \mid y,M) = \int P(\tilde{y} \mid \beta_M,M)\ \pi(\beta,\tau \mid y)\ d\beta_M}$, em que $\tilde{\mathbf{y}}_{ij}$ é um elemento de $\tilde{\mathbf{y}}$, em que i é o número de doses estudadas com , e J o tamanho da cadeia MCMC. Então, o vetor $\tilde{\mathbf{y}}$ é obtido pela substituição dos vetores dos parâmetros do modelo ($\tilde{\boldsymbol{\beta}}_M$) nas Equações (1) e (2) para os valores das variáveis explanatórias que se deseja verificar ($\tilde{\mathbf{X}}$).

O coeficiente de determinação indica a porcentagem da variabilidade dos dados observados que pode ser explicada pelo modelo (HOFFMANN, 2016). Para a verificação do coeficiente de determinação, foram simulados vetores preditivos a posteriori para os mesmos valores de variável explanatória observada (gerando o vetor de predição $\tilde{\mathbf{y}}$).

Depois de gerar a cadeia de 9.000 valores, foi considerada média e intervalo HPD de 95% da distribuição a posteriori do RB_2 para a interpretação prática:

Em que Var($\tilde{\mathbf{y}}$) é a variância do vetor de valores preditos, Var(**d**) é a variância do vetor de desvios do valor predito em relação ao valor observado ($\mathbf{d_i = \tilde{y}_i - y_i}$).

Depois de gerar a cadeia de 9,000 valores de R_B^2, foi considerada média e intervalo HPD de 95% da distribuição a posteriori para a interpretação prática.

Análise de otimização

As doses de N que propiciam valores máximos das variáveis respostas são de grande importância. Porém, a adubação nitrogenada possui um custo. Assim, é desejável determinar intervalos de dosagens que possam gerar valores próximos ao valor máximo da variável resposta, de modo que as dosagens presentes nesses intervalos sejam menores que a dose que gera o máximo, possibilitando a redução de custos com a adubação para o mesmo resultado.

Maximum values were obtained by optimization of fitted models. From the dose generating the maximum value, ranges were recorded for doses that gave statistical evidence that they were different from the dose that generating the maximum response. For this, the Bayes factor was used, combined with Jeffreys (1961) criterion for evidence .

The Bayes Factor was used to test the hypothesis $\mathbf{H_0{:}Y_{max} \leq Y_{FB}}$ **vs** $\mathbf{H_1{:}Y_{max} > Y_{FB}}$, considering the a priori probability in favor of $\mathbf{H_0}$ is equal to a priori probability in favor of $\mathbf{H_1}$. Therefore, the Bayes Factor in favor of can be reduced to:

Os valores máximos foram obtidos por otimização dos modelos ajustados. A partir da dose que gera o valor máximo, verificou-se intervalos para as doses que possuem evidências estatísticas de que são diferentes da dose que gera o máximo. Para isso, foi utilizado o fator de Bayes e o critério de evidência de Jeffreys (1961).

O fator de Bayes foi utilizado para testar as hipóteses $\mathbf{H_0{:}Y_{max} \geq Y_{FB}}$ **vs** $\mathbf{H_1{:}Y_{max} > Y_{FB}}$, considerando a probabilidade a priori a favor de $\mathbf{H_0}$ igual a probabilidade a priori a favor de $\mathbf{H_1}$. Logo, o fator de Bayes a favor de se reduz a:

$$FB_{01} = \frac{P(Y_{max} - Y_{FB} \leq 0|Y)}{P(Y_{max} - Y_{FB} > 0|Y)}. \qquad (5)$$

To determine ranges, an was $\tilde{\mathbf{X}}$ created, this being a sequence of integers from 0 to 300. Subsequently, an a posteriori vector was generated for predicted values ($\tilde{\mathbf{y}}_B$). Subsequently, dose partitions between 0 and 300 kg ha^{-1}-yr^{-1} of N were found which were, according to the Jeffreys (1961) evidence criterion, statistically different from the dose generating the maximum response variable. Jeffreys (1961) criteria being: if FB_{01} lies between 1 and 3: weak evidence; FB_{01} between 3 and 10: substantial evidence; FB_{01} between10 and 30: strong evidence.

All statistical analysis was undertaken using R software (R CORE TEAM).

Para determinar intervalos, foi gerado um vetor de $\tilde{\mathbf{X}}$ sendo uma sequência de números inteiros de 0 a 300. Posteriormente, gerou-se um vetor a posteriori valores preditos ($\tilde{\mathbf{y}}_B$). Então, verificou-se quais partições de doses entre 0 e 300 kg ha^{-1}ano^{-1} de N possuem evidências estatísticas, segundo critério de evidência de Jeffreys (1961), de serem diferentes da dose que gera o máximo da variável resposta. Pelo critério de Jeffreys (1961), se ocorrer FB_{01} entre 1 e 3: evidência fraca; FB_{01} entre 3 e 10: evidência substancial; FB_{01} entre 10 e 30: evidência forte.

Todas as análises estatísticas foram realizadas utilizando-se o software R (R CORE TEAM).

RESULTS AND DISCUSSION

The hyperparameters, mean (μ_k) and varience ($\sigma_{\beta k}^2$) of the a priori distributions of the model parameters are summarized in Table 1.

The characteristics, variability and mean values of a priori distributions are reflect the collection methodology and data from which a priori distributions were derived. That is, different results could be obtained if other methods had been used to assay the significance of parameters, selection and a priori distribution. However, the nature of the analytical process means they will be close to those used.

In Table 2, the convergence criteria values for the linear and quadratic Bayesian regression models are summarized.

As can be seen from Table 2, there is no evidence of non-convergence in a posteriori chains. According to Raftery-Lewis (RL) Criteria, factor values were close to 1, indicating no interaction dependence. By the Geweke Criterion, the values modules (| ZG |) found were smaller than 1.96, indicating that there are no signs of non-convergence. Analyzing the Heidelberger-Welch criteria (pHW), the series was found to be stationary (p> 0.05).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os hiperparâmetros, média (μ_k) e variância ($\sigma_{\beta k}^2$) das distribuições a priori para os parâmetros dos modelos estão resumidos na Tabela 1.

As características, variabilidade e valores médios das distribuições a priori são representativas da metodologia e dos dados em que a distribuição a priori foi obtida. Ou seja, poderia se obter diferentes resultados se fossem adotados outros métodos para a verificação da significância dos parâmetros, de seleção e de distribuição a priori, mas entende-se que as conclusões devem ser próximas.

Na Tabela 2, estão sumarizados os valores resultantes dos critérios de convergência para os modelos de regressão Bayesianos lineares e quadráticos.

Pode-se observar, pela Tabela 2, que não há indícios de não convergência das cadeias a posteriori. Pelo critério de Raftery e Lewis (RL), nota-se que os valores dos fatores foram próximos de 1, indicando ausência de dependência entre interações. Pelo critério de Geweke, os módulos dos valores (|ZG|) encontrados foram menores que 1,96, indicando que não há sinais de não convergência. Analisando o critério de Heidelberger e Welch (pHW), constatou-se que a série é estacionária (p>0,05).

Table 1 - Hyperparameters, mean (μ_k) and varience ($\sigma_{\beta k}^2$) of the a priori distributions of the model parameters for the liner and quadratic models of each response variable

Tabela 1 - Hiperparâmetros, média (μ_k) e variância ($\sigma_{\beta k}^2$) das distribuições normal a priori dos parâmetros dos modelos linear e quadrático de cada variável resposta

Response Variable	Model	β_0		β_1		β_2	
		Mean	Variance	Mean	Variance	Mean	Variance
LM	Linear	1,092.00	721.04	8.62	3.50	-	-
	Quadratic	777.00	6,440.6	12.82	78.34	-0.0112	0.2056
SM	Linear	1,428.00	913.20	7.95	4.45	-	-
	Quadratic	273.00	2,372.9	23.35	28.86	-0.0411	0.0758
LR	Linear	0.7456	0.4180	0.0012	0.0020	-	-
	Quadratic	1.21	2.10	-0.0050	0.0256	1.66×10^{-5}	6.71×10^{-5}
CPL	Linear	7.8740	4.7946	0.0263	0.0282	-	-
	Quadratic	8.26	2.80	-0.0025	0.1123	0.0002	0.0009
CPS	Linear	3.76	0.62	0.0093	0.0083	-	-
	Quadratic	3.8140	2.9388	0.0052	0.1180	3.47×10^{-5}	0.0009

LM – leaf mass; SM – stem mass; LR – leaf ratio; CPL – crude protein, leaf; CPS – crude protein, stem.

MF – massa da folha; MC – massa do colmo; RF – razão foliar; PBF – proteína bruta da folha; PBC – proteína bruta do colmo.

Table 2 - Convergence criteria for the MCMC chains for variable responses to simple linear and quadratic model parameters

Tabela 2 - Critérios de convergência para as cadeias MCMC dos parâmetros dos modelos linear simples e quadrático das variáveis respostas

Simple Linear Regression Model															
Par.	LM			SM			LR			CPL			CPS		
	|ZG|	RL	HW	|ZG|	RL	HW	|ZG|	RL	HW	|ZG|	RL	HW	|ZG|	RL	HW
$\beta0$	0.16	1.06	0.30	1.14	1.05	0.85	1.66	1.00	0.09	0.08	1.01	0.96	0.19	1.01	0.46
$\beta1$	1.94	1.01	0.13	0.90	1.00	0.72	1.50	0.99	0.39	0.35	1.01	0.70	0.72	1.01	0.19
τ	1.50	1.00	0.24	0.79	1.00	0.75	0.62	1.02	0.51	0.21	1.00	0.13	0.59	1.00	0.89
Quadratic regression models															
Par.	LM			SM			LR			CPL			CPS		
	|ZG|	RL	HW	|ZG|	RL	HW	|ZG|	RL	HW	|ZG|	RL	HW	|ZG|	RL	HW
$\beta0$	1.19	1.01	0.57	0.44	1.01	0.71	1.47	1.00	0.94	0.26	1.01	0.47	1.44	1.01	0.12
$\beta1$	1.24	1.02	0.39	0.56	1.00	0.74	0.12	1.00	0.92	0.71	1.00	0.73	0.95	1.00	0.21
$\beta2$	0.51	1.01	0.58	0.78	0.99	0.66	0.40	1.00	0.99	0.64	1.00	0.33	0.64	1.01	0.31
τ	1.13	1.01	0.40	0.27	1.00	0.94	1.15	1.00	0.15	1.02	1.00	0.62	1.01	1.00	0.77

LM – leaf mass; SM – stem mass; LR – leaf ratio; CPL – crude protein, leaf; CPS – crude protein, stem; |ZG| - Geweke criterion; RL – Raftery/Lewis factor; HW Heidelberger /Welch test p-value.

MF – massa da folha; MC – massa do colmo; RF – razão foliar; PBF – proteína bruta da folha; PBC – proteína bruta do colmo; |ZG| - critério de Geweke; RL - fator de Raftery e Lewis; HW valor-p do teste de Heidelberger e Welch.

The adjusted linear and quadratic models, estimates (averages) and $HPD_{95\%}$ intervals for the a posteriori parameter distribuitions are summarized in Table 3.

Os modelos lineares e quadráticos ajustados, estimativas (médias) e intervalos $HPD_{95\%}$ das distribuições a posteriori dos parâmetros estão resumidos na Tabela 3.

Table 3 - Adjusted models (Mod.), linear (Lin.) and quadratic (Qua.), with respective parameter estimates (Estim.) (mean a posteriori), and HPD95% intervals for the various reponse variables (VR)

Tabela 3 - Modelos ajustados (Mod.), lineares (Lin.) e quadráticos (Qua.), com respectivas estimativas dos parâmetros (Estim.) (média a posteriori) e intervalos HPD95% para as diferentes variáveis respostas (VR)

VR	Mod.	"Par."	Estim.	HPD95%		Model representation
				LI	LS	
LM	Lin.	β_0	1,100.9	1,046.0	1,152.0	$\hat{Y}_{MF}$=1,100.93+12.9N
		β_1	12.9	10.13	15.33	
	Qua.	β_0	828.94	669.40	988.90	"$\hat{Y}_{MF}$=828.94+22.16N-0.0234N^2
		β_1	22.16	11.74	31.52	
		β_2	-0.0234^{NS}	-0.0607	0.0147	
SM	Lin.	β_0	1,438.38	1,376.0	1,495.0	$\hat{Y}_{MC}$=1,438.38+10.42N
		β_1	10.42	8.733	12.07	
	Qua.	β_0	284.60	190.20	381.90	$\hat{Y}_{MC}$=284.60+22.99N-0.0278N^2
		β_1	22.99	14.42	31.59	
		β_2	-0.0278^{NS}	-0.0626	0.0066	
LR	Lin.	β_0	1.0990	0.9495	1.2480	$\hat{Y}_{RF}$=1.0990+0.0004N
		β_1	0.0004^{NS}	-0.0004	0.0012	
	Qua.	β_0	0.9934	0.8999	1.091	$\hat{Y}_{RF}$=0.9934+0.0037N-1.11×10^{-5}N^2
		β_1	0.0037	0.0022	0.0053	
		β_2	-1.1×10^{-5}	-1.6×10^{-5}	-6.1×10^{-6}	
CPL	Lin.	β_0	10.07	9.3970	10.71	$\hat{Y}_{PBF}$=10.07+0.0178N
		β_1	0.0178	0.0142	0.0213	
	Qua.	β_0	9.5869	9.2590	9.8990	$\hat{Y}_{PBF}$=9.5869+0.0334N-5.28×10^{-6}N^2
		β_1	0.0334	0.0282	0.0385	
		β_2	-5.3×10^{-5}	-6.9×10^{-5}	-3.6×10^{-5}	
CPS	Lin.	β_0	5.9034	5.612	6.17	$\hat{Y}_{PBC}$=5.9034+0.0098N
		β_1	0.0098	0.0083	0.0113	
	Qua.	β_0	5.8846	5.5560	6.2070	$\hat{Y}_{PBC}$=5.8846+0.0117N-7.17×10^{-6}N^2
		β_1	0.0117	0.0066	0.0171	
		β_2	-7.2^{NS}×10^{-5}	-2.4×10^{-5}	9.6×10^{-5}	

NS – parameter not significant at the 5% level for the adopted criteria. Estim. – Estimate, mean a posteriori; Mod. – Adjusted model; Lin. – Linear model; Qua. – Quadratic model; LM – leaf mass; SM – stem mass; LR – leaf ratio; CPL – crude protein, leaf; CPS – crude protein, stem.

NS – parâmetro não significativo a 5% de probabilidade pelo critério adotado. Estim. – Estimativa, média a posteriori; Mod. – modelo ajustado; Lin. – modelo linear; Qua. – modelo quadrático; MF – massa da folha; MC – massa do colmo; RF – razão foliar; PBF – proteína bruta da folha; PBC – proteína bruta do colmo.

Table 3 shows that parameter β_2 was not significant (**0 ∈ HPD$_{95\%}$**) for the models involving LM, SM and CPS, while parameter was not significant for LR. The linear model was selected LM, SM and CPS, and the quadratic model for LR.

For the adjusted models, the benefits of nitrogen fertilizer to the measured brachiaria characteristics are in agreement with the literature, as these involve increases in mass, and protein content of the stems and leaves as the dose of nitrogen fertilizer increases (CHAGAS; BOTELHO, 2005; SANTOS *et al.*, 2010).

Na Tabela 3, observa-se que o parâmetro β_2 não foi significativo (**0 ∈ HPD$_{95\%}$**) para os modelos de MF, MS e PBC, enquanto o parâmetro não foi significativo para o modelo RF. O modelo linear foi selecionado para MF, MS e PBC, e o modelo quadrático para RF.

Os modelos ajustados, que demonstraram benefício do adubo nitrogenado nas características da braquiária, estão de acordo com a literatura, pois apresentaram aumento na massa, no teor de proteína dos colmos e de folhas com aumento da dose do adubo nitrogenado (CHAGAS; BOTELHO, 2005; SANTOS *et al.*, 2010).

The DIC's, means and HPD intervals of 95% for Bayesian determination coeffecients of significant models are summarized in Table 4.

Os DIC's, médias e intervalos HPD de 95% dos coeficientes de determinação Bayesianos dos modelos significativos estão sumarizados na Tabela 4.

Table 4 - Means and 95% HPD intervals for Bayesian coefficients of significant models

Tabela 4 - Médias e intervalos HPD de 95% dos coeficientes de determinação Bayesianos dos modelos significativos

Response Variable	Model	DIC	Mean R_B^2	$HPD_{95\%}$ (R_B^2)	
				LI	LS
LM	Linear	198.2	0.9478	0.9059	0.9864
SM	Linear	187.7	0.8766	0.8605	0.8847
LR	Quadratic	25.78	0.7875	0.5860	0.8665
CPL	Linear	27.08	0.9145	0.8725	0.9285
	Quadratic	6.44	0.9858	0.9782	0.9891
CPS	Linear	5.63	0.9523	0.9355	0.9579

For CPL, all the model parameters were significant at the $HPD_{95\%}$ level. The quadratic model was therefore selected because, in absolute difference, it was more than 20 units smaller than the linear alternative. For the studied characteristics, the selected models were: linear for LM, SM and CPS, and quadratic for LR and CPL.

On average these models fitted the data well, according to the adopted Bayesian determination coefficient (Table 4).

Increasing linear models were selected for the LM and SM responses, which supports the results of Santos *et al.* (2009), who reported a positive linear effect on the formation of green matter mass and lower dead matter mass in forage, as well as improvments in forage nutritive value with increasing nitrogen concentrations.

LR had a quadratic response to increased N doses, with maximum leaf ratio value being 1.30 for the dose of 167 kg $ha^{-1}yr^{-1}$, after this, LR tends to decrease. This quadratic effect resenbles the results reported by Bonfim-Silva and Monteiro (2006), who studied *Brachiaria brizantha* cv. Xaraés leaf ratios and nitrogen fertilization, reporting that the quadratic polynomial model was the most appropriate in this instance.

CPL also had a quadratic response to N dosing, with a maximum value of 19.67% with 316 kg N $ha^{-1}yr^{-1}$. Although a dose of 316 N kg $ha^{-1}yr^{-1}$ lies beyond the values tested, within experimental space the maximum value would be 19.13% at the 300 kg N $ha^{-1}yr^{-1}$ dosage. Chagas and Botelho (2005) found that brachiaria, cut at 45 days after germination, responded quadratically to nitrogen fertilization, with a maximum response at the N dose of 150 kg $ha^{-1}yr^{-1}$.

The positive and linear effect of N dose on CPS can be explained by the higher availability of N in the soil, which allows greater absorption by the plant, resulting in taller plants (SANTOS *et al.*, 2010), and hence greater stem volumes.

Para PBF, todos os parâmetros dos modelos foram significativos pela verificação do zero no $HPD_{95\%}$. Selecionou-se, portanto, o modelo quadrático por apresentar diferença absoluta de mais de 20 unidades menor do que o linear. Para as características estudadas, os modelos selecionados foram: linear, para MF, MC e PBC, e quadrático, para RF e PBF. Esses modelos apresentaram, em média, bom ajuste aos dados segundo o coeficiente de determinação Bayesiano adotado (Tabela 4).

Modelos lineares crescentes foram selecionados para as respostas MF e MC, o que corrobora com os resultados de Santos *et al.* (2009), que observaram o efeito linear positivo na formação de massa matéria verde e menor massa de matéria morta na forragem, além de melhorar o valor nutritivo da forragem.

O comportamento da RF, em relação as doses de N, foi quadrático, sendo que o valor máximo de razão foliar seria 1,30 para a dose de 167 kg ha^{-1} ano^{-1}, a partir dessa dosagem, a RF tende a diminuir. Esse efeito quadrático verificado no resultado é semelhante ao encontrado por Bonfim-Silva e Monteiro (2006), que estudaram razão foliar de *Brachiaria brizantha cv. Xaraés* e adubação nitrogenada, verificando que o modelo polinomial quadrático seria o mais adequado para esse caso.

O PBF também apresentou resposta quadrática com as doses de N, com valor máximo de 19,67% na dose 316 kg $ha^{-1}ano^{-1}$ de N. Embora a dose de 316 kg $ha^{-1}ano^{-1}$ de N esteja fora do espaço experimental, se considerado o espaço experimental, o máximo ocorrerá de 19,13% na dose de 300 kg $ha^{-1}ano^{-1}$ de N. Chagas e Botelho (2005) verificaram que a braquiária, cortada aos 45 dias após a germinação, responde de modo quadrático a adubação nitrogenada, com máxima resposta na dose de 150 kg ha^{-1} ano^{-1}.

O efeito positivo e linear da dose de N no PBC pode ser explicado pela maior disponibilidade de N no solo, o que proporciona maior absorção pela planta, resultando em plantas mais altas (SANTOS *et al.*, 2010).

For LM, SM and CPS, which modeled best with linear functions, there was no maximum response point. However, within the studied experimental space, maximum response occurred at the highest dose, 300 kg N ha^{-1}yr^{-1}. For the LR and CPL models, the maximum point for the expected response variable was calculated with the first derivative. Maximum expected values for response variables within the evaluated range (0 to 300) and the value ranges for the doses which showed weak, substantial and strong evidence of producing values other than the maximum are summarized in Table 5.

Para a MF, MC e PBC, que foram modelados por funções lineares, não há ponto de máxima resposta, mas dentro do espaço experimental estudado a máxima resposta está na maior dose, 300 kg ha^{-1} ano^{-1} de N. Para os modelos da RF e PBF, o ponto de máximo da variável resposta esperado foi calculado pela derivada primeira. Os valores de máximos esperados para as variáveis respostas dentro do intervalo avaliado (0 a 300) e os intervalos de valores de dosagem que possuem evidências fraca, substancial e forte de produzirem valores diferentes do máximo estão resumidos na Tabela 5.

Table 5 - *Response variables (RV) expected for the maximum value ($\hat{Y}_{max}$) obtained with the maximum dose (Xmax), and nitrogen doses ranges that, with weak, substantial and strong statistical evidence, produced different values from the expected maximum*

Tabela 5 - *Variável resposta (VR) esperada para o valor máximo ($\hat{Y}_{max}$) obtido com a dose máxima (Xmax), e intervalos de doses de nitrogênio que produzem valores diferentes do máximo com evidências estatísticas fraca, substancial e forte*

VR	Evidence			Xmax	$\hat{Y}_{max}$
	Strong	Substantial	Weak	kg ha^{-1}yr^{-1}	
LM (kg)	226 a 248	248 a 274	274 a 300	300	4,970.93
SC (kg)	244 a 260	260 a 280	280 a 300	300	4,564.38
LR*	76 a 90	90 a 113	113 a 167	167	1.30
CPL (%)	233 a 246	246 a 265	265 a 300	300	19.13
CPS (%)	267 a 276	276 a 289	289 a 300	300	8.84

*non-dimentional.

**adimensional.*

The Bayes factor allowed the determination of ranges in which all the values could be considered statistically equal. Using Jeffreys Evidence Table for these we can quantify the intensity of evidence for values occuring within the different maximum ranges. These can then be used based on the characteristics of the grass for which soil improvement is being considered. For example, for soils requiring higher N levels, doses can be used in the range that differs from the maximum by poor evidence, while for soils needing little N supplementation, doses could be applied within the range distinguished from the maximum by strong evidence. So, for example, to optimize the LM characteristic for a soil that needs a lot of N, it can be shown that there is weak evidence that the range 274 to 300 kg N ha^{-1} yr^{-1} is different from the maximum (kg N ha^{-1}yr^{-1}). Therefore, application of 274 kg N ha^{-1}yr^{-1} would, statistically, result in the same maximum response value, that is a difference of about 9% of the maximum dose, for the same effect. Likewise, for LM, there is substantial evidence for the range of values between 248 and 274, and strong evidence for the range of values between 226 and 248 kg N ha^{-1}yr^{-1}. Thus, within each of these ranges, we can opt for the lower dose because it has the lowest cost.

O fator de Bayes possibilita a elaboração de intervalos, dos quais, todos valores neles contidos são considerados estatisticamente iguais, e, com a utilização da Tabela de evidências de Jeffreys, pode-se quantificar as intensidades das evidências de valores dentro dos intervalos diferentes do máximo. Esses intervalos podem ser utilizados de acordo com a característica da gramínea que se deseja melhorar a necessidade do solo. Por exemplo, para solos que necessitam de maiores doses de N, pode-se utilizar doses do intervalo que se diferencia do máximo por uma fraca evidência, enquanto que para solos de poucas necessidades de N, pode-se optar por doses dentro do intervalo que se diferencia do máximo por uma forte evidência. Então, objetivando-se, por exemplo, otimizar a característica MF, para um solo que necessite de bastante N, pode-se verificar que há uma evidência fraca de que o intervalo de 274 a 300 kg ha^{-1} ano^{-1} de N é diferente do máximo (kg ha^{-1} ano^{-1} de N). Portanto, a aplicação de 274 kg ha^{-1} ano^{-1} de N resultaria, estatisticamente, no mesmo valor da resposta máxima, ou seja, uma diferença de cerca de 9% da dose máxima para o mesmo efeito. Da mesma maneira, para MF, há evidência substancial para o intervalo de valores entre 248 e 274 kg ha^{-1}ano^{-1} de N e forte para o intervalo de valores entre 226 e 248. Assim, dentro de cada intervalo, opta-se pela menor dose por se tratar do menor custo.

CONCLUSIONS

The Bayesian approach proved to be efficient for modeling the nitrogen effect on the morphological characteristics of Brachiaria grass. This allows the use of a priori data available in the literature and provides estimation of ranges for optimization;

The N dose (kg ha^{-1} ano^{-1}) ranges required to achieve maximum response are: 274 to 300 for LM, 280 to 300 for SM, 113 to 167 for LR, 265 to 300 para CPL and 289 to 300 for CPS.

CONCLUSÕES

A abordagem Bayesiana se mostrou eficiente para a modelagem do efeito do nitrogênio nas características morfológicas do capim-braquiária. Permitindo utilizar dados a priori disponíveis na literatura e possibilitando intervalos de evidência para otimização;

Os intervalos de doses de N (kg ha^{-1} ano^{-1}) possíveis de atingir a máxima resposta são: 274 a 300 para MF, 280 a 300 para MC, 113 a 167 para RF, 265 a 300 para PBF e 289 a 300 para PBC.

ACKNOWLEDGEMENTS

The current study received support from the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Financing Code 001. The authors also thank Unifal-MG and CNPq for study grants.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Os autores também agradecem à Unifal-MG e ao CNPq pelas bolsas de estudo concedidas.

CITED SCIENTIFIC LITERATURE

BONFIM-SILVA, E. M.; MONTEIRO, F. A. Nitrogênio e enxofre em características produtivas do capim-braquiária proveniente de área de pastagem em degradação. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 35, n. 4, p. 1289-1297, 2006.

BONFIM-SILVA, E. M.; SILVA, M. C.; SCHLICHTING, A. F.; PORTO, R. A.; SILVA, T. J. A.; KOETZ, M. Desenvolvimento e produção de capim-convert HD364 submetido ao estresse hídrico. **Revista Agro@mbiente**, v. 8, n. 1, p. 134-141, 2014.

CABRAL, C. E. A.; ABREU, J. G.; BONFIM-SILVA, E. M.; CABRAL, C. H. A.; SCARAMUZZA, J. F.;SILVA, T. J. A. Eficiência de produção e concentração de nitrogênio nos capins marandu, decumbens e convert submetidos à adubação nitrogenada. **Bioscience Journal**, v. 29, n. 5, p. 1653-1662, 2013.

CARMEIS FILHO, A. C. A.; CUNHA, T. P. L.; MINGOTTE, F. L. C.; AMARAL, C. B.; LEMOS, L. B.; FORNASIERI FILHO, D. Adubação nitrogenada no feijoeiro após palhada de milho e braquiária no plantio direto. **Revista Caatinga**, v. 27, n. 2, p. 66-75, 2014.

CARVALHO, D. T.; BEIJO, L. A.; MUNIZ, J. A. Uma abordagem bayesiana para modelar a isoterma de langmuir. **Revista Brasileira de Biometria**, v. 35, n. 2, p. 376-401, 2017.

CHAGAS, L. A. C.; BOTELHO, S. M. S. Teor de proteína bruta e produção de massa seca do capim-brachiária sob doses de nitrogênio. **Bioscience Journal**, v. 21, n. 1, p. 35-40, 2005.

COELHO, J. S. **Ecofisiologia e composição bromatológica de *brachiaria decumbens* em sistemas silvipastoris com diferentes arranjos espaciais**. 2012. 47f. Dissertação (Mestrado em Zootecnia) -Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Diamantina.

COSTA, K. A. P.; FAQUIN, V.; OLIVEIRA, I.P. Doses e fontes de nitrogênio na recuperação de pastagens do capim-marandu. **Arquivo Brasileiro de Medicina Veterinária e Zootecnia,** v. 62, n. 1, p. 192-199, 2010.

FAGUNDES, J. L.; FONSECA, D. M.; GOMIDE, J. A.; NASCIMENTO JUNIOR, D.; VITOR, C. M. T.; MORAIS, R. V.; MISTURA, C.; REIS, G. C.; MARTUSCELLO, J. A. Acúmulo de forragem em pastos de *Brachiaria decumbens* adubados com nitrogênio. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v. 40, n. 4, p. 397-403, 2005.

GEWEKE, J. Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments in Bayesian Statistics. **Oxford University Press**, v. 4, p. 169-193, 1992.

HEIDELBERGER, P. E.;WELCH, P. D. Simulation run length control in the presence of an initial transiente. **Operations Research**, v. 31, p. 97-109, 1983.

HOFFMANN, R. **Análise de regressão: uma introdução à econometria**. São Paulo: USP, 2016, 393 p.

JEFFREYS, H. **Theory of Probability**. 3 ed. London: Oxford University, 1961, 470 p.

LEWIS, P. O.; XIE, W.; CHEN, M. H.; FAN, Y.; KUO, L. Posterior predictive Bayesian phylogenetic model selection. **Systematic biology**, v. 63, n. 3, p. 309-321, 2013.

MAGALHÃES, A. F.; PIRES, A. J. V.; CARVALHO, G. G. P.; SILVA, F. F.; SOUSA, R. S.; VELOSO, C. M. Influência do nitrogênio e do fósforo na produção do capim-braquiária. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 36, n. 5, p. 1240-1246, 2007.

MARANHÃO, C. M. A. Características produtivas do capim-braquiária submetido a intervalos de cortes e adubação nitrogenada durante três estações. **Acta Scientiarum - Animal Sciences**. v. 32, p. 375-384, 2010.

MARTINS FILHO, S.; SILVA, F. F.; CARNEIRO, A. P.; MUNIZ, J. A. Abordagem bayesiana das curvas de crescimento de duas cultivares de feijoeiro. **Ciência Rural**, v. 38, n. 6, p. 1516-1521, 2008.

MARTUSCELLO, J. A.; OLIVEIRA, A. B. D.; CUNHA, D. D. N. F. V.; AMORIM, P. L. D.; DANTAS, P. A. L. Produção de biomassa e morfogênese do capim-braquiária cultivado sob doses de nitrogênio ou consorciado com leguminosas. **Revista Brasileira de Saúde e Produção Animal**, Salvador, v. 12, n. 4, p. 923-934, 2011.

MOREIRA, L. M.; SANTOS, M. E.; FONSECA, D.; MARTUSCELLO, J. A.; MORAIS, R.; MISTURA, C. Produção animal em pastagem de capim-braquiária adubada com nitrogênio. **Arquivo Brasileiro de Medicina Veterinária e Zootecnia,** v. 63, n. 4, p. 914-921, 2011.

R CORE TEAM: **A language and environment for statistical computing**. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.

RAFTERY, A. E.; LEWIS, S. How many iterations in the Gibbs sampler, in Bayesian Statistics. **Oxford University Press**, v. 4, p. 763-773, 1992.

ROBERT, C. **The Bayesian choice: from decision-theoretic foundations to computational implementation**. New York: Springer Science & Business Media, 2007, 602 p.

SANTOS, M. E. R.; FONSECA, D. M.; BALBINO, E. M.;MONNERAT, J. P. I. S.; SILVA, S. D. Capim braquiária diferido e adubado com nitrogênio: produção e características da forragem. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 38, n. 4, p. 650-656, 2009.

SANTOS, M. E. R.; FONSECA, D.; BALBINO, E.; SILVA, S. P.; MONERAT, J. P. Valor nutritivo de perfilhos e componentes morfológicos em pastos de capim-braquiária diferidos e adubados com nitrogênio. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 39, n. 9, p. 1919-1927, 2010.

SILVA, F. F.; SÁFADI, T.; MUNIZ, J.; DE AQUINO, L. H.; MOURÃO, G. B. Comparação bayesiana de modelos de previsão de diferenças esperadas nas progênies no melhoramento genético de gado Nelore. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v. 43, n. 1, p. 37-45, 2008.

SILVA, E. M. B.; SANTOS, C. C.; NASIMENTO F., L.; VILARINHO, M. K. C.; GGUIMARÃES, S. L.; SILVA, T. J. A. Características morfológicas e produtivas do capim-marandu adubado com fosfato natural reativo em solo de cerrado. **Revista Agro@mbiente**, v. 6, n. 2, p. 166-171, 2012.

SKONIESKI, F. R.; VIÉGAS, J.; BERMUDES, R.; NÖRNBERG, J.; ZIECH, M.; COSTA, O. A. D.; MEINERZ, G. R. Composição botânica e estrutural e valor nutricional de pastagens de azevém consorciadas. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 40, n. 3, p. 550-556, 2011.

SPIEGELHALTER, D.J.; BEST, N.G.; CARLIN, B.P.; VAN DER LINDE, A. Bayesian measures of model complexity and fit. **Journal of the Royal Statistical Society: Series B – Statistical Methodology**, v. 64, p. 583639, 2002.

THOMAS, A.; O'HARA, R. B. **OpenBUGS**. 2004.

TEODORO, P. E.; NASCIMENTO, M.; TORRES, F. E.; BARROSO, L. M. A.; SAGRILO, E. Perspectiva bayesiana na seleção de genótipos de feijão-caupi em ensaios de valor de cultivo e uso. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v. 50, n. 10, p. 878-885, 2015.